# Spracovanie geodetických sietí singulárnym rozkladom konfiguračnej matice

*Gabriel Weiss*[1]

**Geodetic networks of processing by singular decomposition of the configuration matrix**

The paper present a solution of the Gauss-Markov Model for processing geodetic networks with constraints using singular decomposition of the network's design matrix ***A***. The homogenisation and dehomogenisation of the model needed for this purpose is introduced too. Outputs of the solution are presented by the necessary matrices and upon advantages of this way are discoursed.

**Key words:** singular decomposition, configuration matrix, homogenisation, dehomogenisation.

## Úvod

Je všeobecne známe, že štandardné riešenie Gauss-Markovovho odhadovacieho modelu - norma a Cayleyho inverzia matice ***N*** normálnych rovníc) je prjateľné iba vtedy, ak ***N***, resp. systém normálnych rovníc je dobre podmienený, t.j. ak realizácia príslušného algoritmu má potrebnú numerickú stabilitu (Riečanová et al., 1987; Schwartz et al., 1972; Vitásek, 1987; Ralston, 1978).

V praxi sú však časté také príklady geodetických sietí, pre ktoré je ich konfiguračná matica ***A***, resp. $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ (pri $\boldsymbol{Q}^L = \boldsymbol{I}$) veľmi citlivá na malé zmeny vo vstupných veličinách (malé zmeny prvkov ***A***, nedostatočne presné približné hodnoty súradníc bodov siete, zaokrúhľovanie v procese počítačového riešenia, zmena počtu určovaných parametrov siete, ap.), čo vplýva nielen na numerickú stabilitu výsledku, ale aj použitého postupu riešenia. To má za následok skoro singulárnu maticu $\boldsymbol{N}^{-1}$ ($det(\boldsymbol{N})$ sa blíži $0$) a v konečnom dôsledku neprijateľné odhady súradníc určovaných bodov.

Zlá podmienenosť sa ťažko definuje, ale prejaví sa tým, že napr. matica ***N*** (ale aj absolútne členy normálnych rovníc $\boldsymbol{A}^T d\boldsymbol{L}$) nadobúda vysokú hodnotu tzv. čísla podmienenosti ($CN>100$) (Riečanová et al., 1987; Schwartz et al., 1972; Ralston, 1978; Faddejev, 1978]. Rôzni autori, napr. Todd, Turing, Hadamard uvádzajú uvádzajú rôzne konštrukcie výpočtu *CN* pomocou vlastných čísel a euklidovskej normy matice ***N***.

Aby tieto formálne problémy, ktoré vieme zistiť ale väčšinou nie odstrániť, neumožnili napr. v prípade nevhodných sieťových štruktúr ich riešenie, je možné použiť na riešenie Gauss-Markovovho modelu aj iné postupy, ako je inverzia ***N***, resp. rôzne iteračné procesy. Z týchto postupov, ktoré riešia najlepšie odhady parametrov (súradníc) siete pomocou sústavy normálnych rovníc, sú doteraz rozpracované a používané najmä ortogonalizačné transformácie (Bell et al.,1973; Kamijo, 1991; Völgyesi, 1980) a z nich najmä Gram-Schmidtova ortogonalizácia (Chramza, 1971; 1978).

Okrem nich je účinným matematickým nástrojom na riešenie Gauss-Markovovho odhadovacieho modelu aj procedúra singulárnej dekompozície matíc (Forsythe, 1967; Forsythe et al., 1977; Wilkinson et al., 1971), v danom prípade aplikovaná na konfiguračnú maticu siete ***A***.

Rozpracovanie tohoto postupu vyrovnania geodetických sietí so všetkými priebežnými výsledkami prezentuje predmetný príspevok.

## Riešenie úlohy

Majme polohovú geodetickú sieť väzbového typu, v ktorej na základe merania *n* geodetických veličín (observačný vektor ***L***) medzi určovanými hodnotami $P_i$, $i \in <1, p>$ (so známymi určiteľnými

[1] Katedra geodézie a geofyziky F BERG Technickej univerzity, 043 84 KOŠICE, Park Komenského 19
(Recenzenti: Doc.Ing. Michal Badida, CSc. a Doc.Ing. Ján Cirbus, CSc. Revidovaná verzia doručená 27.3.1997)

približnými súradnicami $C^o$) a dátumovými bodmi $B_j$ , $j \in <1, b>$ určitého súradnicového systému (dátumu) $S^K$, sa určujú odhady $k=2p$ súradníc $\hat{\mathbf{C}}$. Presnosť meraní, t.j. vektora $\boldsymbol{L}$ resp. $d\boldsymbol{L}$ nech je charakterizovaná pozitívne definitnou maticou $\boldsymbol{Q}_L$ kofaktorov observácií. Príslušný Gauss-Markovov model je (Pelzer, 1980, 1985)

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{A} d\hat{\mathbf{C}} - d\mathbf{L}, \\ \Sigma_L &= \sigma_0^2 \mathbf{Q}_L, \end{aligned} \tag{1}$$

kde $\boldsymbol{v}$ je $n \times 1$ rozmerný vektor opráv (observácií), $\boldsymbol{A}$ je $n \times k$ rozmerná konfiguračná regulárna matica siete, t.j. $rk(\boldsymbol{A})=n=k$, $d\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{C}} - \mathbf{C}^o$ je $k \times 1$ rozmerný vektor doplnkov súradnicových odhadov $\hat{\mathbf{C}}$, $d\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}^\circ$ je $n \times 1$ rozmerný vektor redukovaných observácií, $\sigma_0^2$ je apriórny variančný faktor a $\Sigma_L$ je $k \times k$ rozmerná kovariančná matica observácií.

## Homogenizácia odhadovacieho modelu

Riešenie modelu (1) na základe singulárnej dekompozície $\boldsymbol{A}$ je výhodné vykonať s homogenizovanými observáciami $d\boldsymbol{L}_H$ ,resp. s homogenizovaným odhadovacím modelom (Wolf, 1993).

Homogenizáciou observácii $\boldsymbol{L}$ ,resp. $d\boldsymbol{L}$ s diagonálnou kofaktorovou maticou $\boldsymbol{Q}_L$ dostávame homogenizované observácie, t.j. vektor $\boldsymbol{L}_H$ ,resp. $d\boldsymbol{L}_H$ s $\boldsymbol{Q}_{LH}=\boldsymbol{I}$, pričom homogenizácia sa v (1) bude týkať aj ďalších maticových prvkov a realizuje sa pomocou vynásobenia zľava výrazom $\boldsymbol{P}_L^{1/2} = \boldsymbol{Q}_L^{-1/2}$, pričom $\boldsymbol{P}_L$ je $n \times n$ rozmerná matica váh observácií.

Homogenizovaná verzia modelu (1) môže byť zapísaná v tvare

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_H &= \mathbf{A}_H d\hat{\mathbf{C}}_H - d\mathbf{L}_H, \\ \Sigma_{LH} &= \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{LH} = \sigma_0^2 \mathbf{I}, \end{aligned} \tag{2}$$

kde

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{L}_H &= \sqrt{\boldsymbol{P}_L}\, d\boldsymbol{L}, \\ \boldsymbol{v}_H &= \sqrt{\boldsymbol{P}_L}\, \boldsymbol{v}, \\ \boldsymbol{A}_H &= \sqrt{\boldsymbol{P}_L}\, \boldsymbol{A}, \\ \Sigma_{LH} &= \sqrt{\boldsymbol{P}_L}\, \Sigma_L = \sigma_0^2 \sqrt{\boldsymbol{P}_L}\, \boldsymbol{Q}_L = \sigma_0^2 \boldsymbol{I}. \end{aligned} \tag{3}$$

Dá sa jednoducho dokázať, že v modeli (2) označený vektor $d\hat{\mathbf{C}}_H$ (odpovedajúci homogenizovaným observáciám), po použití výrazov (3) v príslušnom estimátori (Pelzer, 1980,1985) bude

$$d\hat{\mathbf{C}}_H = \left(\mathbf{A}_H^T \mathbf{A}_H\right)^{-1} \mathbf{A}_H^T \mathbf{I} d\mathbf{L}_H = \left(\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_L^{-1} \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_L^{-1} d\mathbf{L} = d\hat{\mathbf{C}}. \tag{4}$$

## Singulárna dekompozícia a určenie parametrov vyrovnanej siete

Model (2) sa bude riešiť transformáciou na ekvivalentný model s vyššou numerickou stabilitou, ktorej podstatou bude dekompozícia matice $\boldsymbol{A}_H$ na jej singulárne čísla (Dahlquist et al., 1974, Forsythe et al, 1967, Forsythe et al., 1977, Wilkinson et al., 1971, Mika, 1985). Podľa príslušnej teórie, k reálnej matici $\boldsymbol{A}_H$ rozmeru $n \times k$, $n>k$, existujú také ortogonálne matice $\boldsymbol{U}$ a $\boldsymbol{V}$ ($\boldsymbol{U}$ rozmeru $n \times n$, $\boldsymbol{V}$ rozmeru $k \times k$),ktoré zabezpečia, že prvky $s_{ij}$ matice

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{A}_H \boldsymbol{V} \tag{5}$$

rozmeru $n \times k$ majú vlastnosti:

$s_{ij}=0$, pre $i \neq j$,
$s_{ij}=\sigma_i \geq 0$,
kedže medzi príslušnými maticami platia vzťahy

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_H &= \boldsymbol{USV}^T, \\ \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}, \ \ \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V} &= \boldsymbol{I}, \ \ \boldsymbol{VV}^T = \boldsymbol{I}. \end{aligned} \tag{6}$$

Prvky $s_{ij}$ sa nazývajú singulárnymi číslami matice $\boldsymbol{A}_H$ a stĺpce v $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ singulárnymi vektormi, ktoré sú ortonormálnymi vektormi matice $\boldsymbol{A}_H\boldsymbol{A}_H^T$, resp. $\boldsymbol{A}_H^T\boldsymbol{A}_H$.

Matice $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{S}$ sa získavajú priamym príkazom pre singulárny rozklad $\boldsymbol{A}_H$ vo väčšine súčasných matematicko - štatistických softvérov ("sdv" funkcia).

Ak sa (5) dosadí do (2), s prihliadnutím na (4) dostávame

$$\mathbf{v}_{\mathrm{H}} = \mathbf{USV}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\hat{\mathbf{C}} - \mathrm{d}\mathbf{L}_{\mathrm{H}}$$

a po vynásobení zľava $\boldsymbol{U}^T$

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_{\mathrm{H}} = \mathbf{SV}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\hat{\mathbf{C}} - \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\mathbf{L}_{\mathrm{H}}.$$

S označeniami

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_{\mathrm{H}} = \mathbf{r}, \qquad \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{p}, \qquad \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\mathbf{L}_{\mathrm{H}} = \mathbf{m} \tag{7}$$

máme potom model na určenie $\mathrm{d}\hat{\mathbf{C}}$ štrukturálne ekvivalentný modelu (2)

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{Sp}-\boldsymbol{m}\ , \tag{8}$$

ktorý v rozpísanom tvare predstavuje sústava

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_k \\ r_{k+1} \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & & & \\ & S_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & S_k \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_k \\ m_{k+1} \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix},$$

v ktorom

$$\begin{aligned} &r_i=s_ip_i-m_i,\ i \leq k, \\ &r_1=0\ -m_i,\ i>k \end{aligned} \tag{9}$$

a príslušné vektory

$\boldsymbol{r}=[\boldsymbol{r}_k, \boldsymbol{r}_m]^T$; $\boldsymbol{r}_k$ je rozmeru $k \times 1$, $\boldsymbol{r}_n$ je rozmeru $(n-k) \times 1$,
$\boldsymbol{m}=[\boldsymbol{m}_k, \boldsymbol{m}_n]^T$; $\boldsymbol{m}_k$ je rozmeru $k \times 1$, $\boldsymbol{m}$ je rozmeru $(n-k) \times 1$.

Z postupu pre tvorbu (8) vyplýva, že *sdv* funkcia transformuje riešenie $d\hat{\mathbf{C}}$ pomocou MNŠ s normálnymi rovnicami $\left(\boldsymbol{N}_H = \boldsymbol{A}_H^T\boldsymbol{A}_H\right)$ podľa (2) a minimalizáciou $\|\boldsymbol{v}\|_E^2$ na riešenie $d\hat{\mathbf{C}}$ podľa (8) s diagonálnou maticou $\boldsymbol{S}$, t.j. so singulárnymi číslami (ktoré sú mimoriadne necitlivé na poruchy v prvkoch $\boldsymbol{A}_H$ ) a s minimalizáciou

$$\|r\|_E^2 = \sum_1^n r_i^2 = \sum_i^k r_i^2 + \sum_{k+1}^n r_i^2 = min. \tag{10}$$

Minimalizácia (10), pri prijatí

$$p_i = \frac{m_i}{S_i}, \qquad i \le k, \tag{11}$$

kedy v (9) $r_i = S_i \frac{m_i}{S_i} - m_i = 0$, a teda v (10) je $\sum_1^k r_i^2 = 0$ pre $i \le k$, t.j. $r_1 = r_2 = ... = r_k = 0$, sa redukuje (keďže v (10) bude $\sum_{k+1}^n r_i^2 > 0$) na minimalizáciu tohoto člena, t.j.

$$\|r\|_E^2 = \sum_{k+1}^n r_i^2 = min. \tag{12}$$

Na základe uvedeného, bude mať ***r*** štruktúru

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_k & \mathbf{r}_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & I & -m_{k+1} & m_{k+2} & \cdots & m_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{m}_n \end{bmatrix}^T$$

a potom pre (12) ako cieľovú funkciu platí (Forsythe et al., 1967, 1977), teda

$$\|\boldsymbol{r}\|_E^2 = \boldsymbol{r}_n^T \boldsymbol{r}_n = \boldsymbol{m}_n^T \boldsymbol{m}_n = min$$

Pri splnení tejto podmienky sa vytvoria hľadané odhady $\mathrm{d}\hat{\mathbf{C}}$.

Zo vzťahov (11) potom pre $k \times 1$ rozmerný vektor ***p*** platí

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{m} / vec(\boldsymbol{S}) = \begin{bmatrix} \frac{m_1}{s_1} & \frac{m_2}{s_2} & \mathrm{L} & \frac{m_k}{s_k} \end{bmatrix}, \tag{13}$$

takže je možné určiť vektor $d\hat{\mathbf{C}}$ podľa príslušného vzťahu (7), pre ktorý dostávame

$$\begin{aligned} d\hat{\mathbf{C}} &= \mathbf{V}\mathbf{p}, \\ \hat{\mathbf{C}} &= \mathbf{C}^\circ + d\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^\circ + \mathbf{V}\mathbf{p}, \end{aligned} \tag{14}$$

pričom pre normu $\mathrm{d}\hat{\mathbf{C}}$ platí (Forsythe et al., 1967, 1977)

$$\left\| d\hat{\mathbf{C}} \right\|_E^2 = d\hat{\mathbf{C}}^T d\hat{\mathbf{C}} = \|\mathbf{p}\|_E^2 = \mathbf{p}^T \mathbf{p} = \min.$$

**Opravy meraných veličín**

Homogenizované opravy $\boldsymbol{v}_H$ sa určia podľa (2), resp. na základe (7) zo vzťahu

$$\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{v}_H = \boldsymbol{r},$$

teda

$$\boldsymbol{v}_H = \boldsymbol{U}\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_k & \boldsymbol{U}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{m}_n\end{bmatrix} = -\boldsymbol{U}_n\boldsymbol{m}_n = -\boldsymbol{U}_n\boldsymbol{U}_n^T d\boldsymbol{L}_H\,. \tag{15}$$

Dehomogenizácia opráv sa vykoná v zmysle

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{P}_L^{1/2}\boldsymbol{v}_H = \boldsymbol{Q}_L^{1/2}\boldsymbol{v}_H\,. \tag{16}$$

### *2.4 Kofaktorová a kovariančná matica*

Výraz (14) sa so zohľadnením (13) a uvažovaním $\boldsymbol{U}$ v zmysle (15) a (7) zapíše v tvare

$$d\hat{\mathbf{C}} = \frac{\mathbf{V}\mathbf{U}_k^T d\mathbf{L}_H}{vec(\mathbf{S})} \tag{17}$$

a pre určenie $\mathbf{Q}_{d\hat{C}} = \mathbf{Q}_{\hat{C}}$ sa použije pravidlo o tvorbe kofaktorov funkcií pri daných argumentoch (v danom prípade $\boldsymbol{Q}_{LH} = \boldsymbol{I}$ pre $d\boldsymbol{L}_H$).

Bude preto platiť

$$\mathbf{Q}_{\hat{C}} = \frac{\mathbf{V}\mathbf{U}_k^T}{vec(\mathbf{S})}\mathbf{Q}_{LH}\left(\frac{\mathbf{V}\mathbf{U}_k^T}{vec(\mathbf{S})}\right)^T = \frac{\mathbf{V}\mathbf{U}_k^T}{vec(\mathbf{S})}\mathbf{I}\frac{\mathbf{U}_k\mathbf{V}^T}{vec(\mathbf{S})^T}\,,$$

odkiaľ vzhľadom na (6) vyplýva

$$\mathbf{Q}_{\hat{C}} = \mathbf{V}\frac{1}{vec(\mathbf{S})}\frac{1}{vec(\mathbf{S})}\mathbf{V}^T = \mathbf{V}\frac{1}{vec(\mathbf{S})^2}\mathbf{V}^T,$$

resp.

$$\mathbf{Q}_{\hat{C}} = \mathbf{V}diag\begin{pmatrix}\frac{1}{s_1^2} & \cdots & \frac{1}{s_k^2}\end{pmatrix}\mathbf{V}^T \tag{18}$$

Dá sa ukázať, že ak by sme vzhľadom na argument $d\boldsymbol{L}_H$ v (17) označili kofaktorovú maticu ako $\mathbf{Q}_{\hat{C}H}$, bude platí:

$$\mathbf{Q}_{\hat{C}H} = \left(\mathbf{A}_H^T\mathbf{A}_H\right)^{-1} = \left(\left(\mathbf{P}_L^{1/2}\mathbf{A}\right)^T\mathbf{P}_L^{1/2}\mathbf{A}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{P}_L\mathbf{A}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_L^{-1}\mathbf{A}\right)^{-1} = \mathbf{Q}_{\hat{C}}\,, \tag{19}$$

čo znamená, že matica kofaktorov je invariantná k homogenizácii observácií.

K vyšetreniu kovariančnej matice odhadov $\Sigma_{\hat{C}}$ sa vopred určí kvadratická forma opráv, pre ktorú platí

$$\Omega_H = \boldsymbol{v}_H^T\boldsymbol{v} = \left(\boldsymbol{P}_L^{1/2}\boldsymbol{v}\right)^T\boldsymbol{P}_L^{1/2}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{P}_L\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{Q}_L^{-1}\boldsymbol{v} = \Omega \tag{20}$$

a ktorá, ako vidno, je tiež invariantná voči homogenizácii observácií, resp. opráv.

Potom aposteriórny variančný faktor tiež bude

$$s_{0H}^2 = {\Omega_H}/{(n-k)} = {\Omega}/{(n-k)} = s_0^2 \tag{21}$$

a kovariančná matica

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{C}H} = s_0^2 \mathbf{Q}_{\hat{C}} = \mathbf{V} diag\begin{pmatrix} \frac{s_0^2}{s_1^2} & \cdots & \frac{s_0^2}{s_k^2} \end{pmatrix} \mathbf{V}^T ,$$

pričom aj teraz platí

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{C}H} = s_0^2 \mathbf{Q}_{\hat{C}H} = s_0^2 \mathbf{Q}_{\hat{C}} = \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{C}} . \tag{22}$$

**Ostatné výpočty**

Na základe zistených veličín $\hat{\mathbf{C}}$, $v$, $\mathbf{Q}_{\hat{C}}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{C}}$ je možné podľa bežných postupov určiť ďalšie potrebné veličiny, charakterizujúce vlastnosti a kvalitu siete (Pelzer, 1980, 1985). Napr. pre odhady nameraných veličín

$$\hat{L} = L + v ,$$

sa ich presnostná charakteristika - kovariančná matica $\mathbf{Q}_{\hat{L}}$ určí štandardným postupom s použitím príslušného pravidla pre určenie kofaktorových resp. kovariančných funkcií (Wolf, 1993).

### *3. Záver*

Prezentovaný postup spracovania geodetických sietí poskytuje vzhľadom k štandardným riešeniam Gauss-Markovovho modelu viac výhod. Je to predovšetkým vhodnosť postupu pre spracovanie sietí aj s nie dobre podmienenými maticami ***N*** ale tiež menší rozsah numerických riešení. Výsledky spracovania geodetických sietí týmto postupom sú úplne zhodné s výsledkami štandardného riešenia (pravda, pri požadovanej numerickej stabilite numerických argumentov).
a základe doterajších skúseností s použitím singulárnej dekompozície bude ju účelné v budúcnosti uprednostniť pred štandardným riešením, pretože je to postup efektívny, vhodný aj pre stĺpcove singulárne matice ***A***, teda pre vyrovnanie aj väzbových aj voľných geodetických sietí.

### *Literatúra*


Bácsatyai, L.: Alineáris egyenletrendszer kondicionáltsága és a geodéziai halózatok szerkezete. *Geod. és Kart., 1974, 6, 439-443.*

Bell, J.F. et al.: Some notes on the application of orthogonal matrix transformations on the last squares problem. *Procesed. IAG Symp. Oxford, 1973.*

Dahlquist, G.& Bjőrck, A.: Numerical Methods. *New York, Prentice -Hall, 1974.*

Faddejew, D.R. et al.: Numerische Methoden der linearen Algebra. *Deutsch. Vlg. Wissensch., Berlin 1978.*

Forsythe, G.E. & Moler, C.B.: Computer Solution of Linear Algebraic Systems. *Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1967.*

Forsythe, G.E. & Moler, C.B.: Computer Methods for mathematical Computations. *New York, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1977.*

Chramza, F.: Orthogonalization Algorithm for Solving the Fundamental Problems of the Calculus of the Observation. *Geofyzikální sborník XIX. (1971). No. 346, 59-100.*

Chramza, F.: An Algorithm for the Minimum-length Least Squares Solution of a Set of Observation Eqations. *Studia geoph. et geoda et. 22 (1978), 3, 129-139.*

Kamijo, K.: A method of Adjustment of free network by orthogonal decomposition. *Manuscripta geodaetica, 1991 (16), i, 19-27.*

Mika, S.: Numerické metódy algebry. *SNTL Praha, 1985.*

Pelzer, H.: (Hrsg): Geodätische Netze in Landes-und Ingenieurvermessung I., II. *Wittwer, Stuttgart 1980, 1985.*

Ralston, A.: Základy numerické matematiky. *Academie Praha 1978.*

Riečanová, Z. et. al.: Numerické metódy a matematická štatistika. *Alfa Bratislava 1987.*

Schwartz, H.R. et al.: Matrizen-Numerik, *Stuttgart 1972.*

Vitásek, E.: Numerické metódy. *STN Praha 1987*.

Völgyesi, L.: A mátrix - ortogonalizációs módszer gyakorlati alkalmazása a kiegyenlitő számításban. *Geod. és Kart. 1980, d, 7-15*.

Wilkinson, J.H., Reinsch, C.: Linear algebra (Hand Book for Automatic Computation II.), *Berlin, Springer 1971*.

Wolf, H.: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der Kleinsten Quadrate. *Dümmler, Bonn, 1993*.