Bezrozporové geodetické transformácie

Juraj Sütti [1]

Deviationless geodetic transformations

In a geodetic transformation of two networks (old, new), coordinate deviations come into being at the identical points and the transformated coordinates have to be corrected. A new deviationless method of Helmert and affine transformation is presented in which the definitive coordinates of the transformated points are determined directly using a Gauss-Markoff model.

Key words: 2D transformation, coordinate discrepancies, deviationless Helmert and affine transformation.

Úvod

Pri transformáciách súradníc geodetického bodového poľa s dvomi dátumami , transformácie sa vykonajú na základe transformačných rovníc, v ktorých neznáme trasformačné parametre je potrebné vopred určiť. Transformačné parametre sa všeobecne určujú pomocou súradníc tzv. homologických (identických, uzlových) bodov bodového poľa pre ktoré sú k dispozícii súradnice aj v jednom aj v druhom dátume. Ako je známe, pri výpočte transformovaných súradníc homologických bodov H_i, $i \in \langle 1,h \rangle$ pomocou transformačných parametrov , získavame iné hodnoty súradníc C_H^t , ktoré sa od pôvodných (daných) súradníc C_H líšia. Vzniklé odchýlky $dC=C_H-C_H^t$ predstavujú tzv. súradnicové rozpory príslušnej transformácie , ktoré sa pri určení definitívnych súradníc nových-transformovaných bodov U_j, $j \in \langle 1,u \rangle$ musia vhodným spôsobom zohľadniť.

V predloženej práci sa prezentuje nový postup výpočtu definitívnych súradníc určovaných bodov U_j na báze ich priameho určenia pomocou vhodného odhadovacieho modelu, t.j. bez formálneho vzniku súradnicových rozporov. Riešenie je ukázané pre prípady 2D transformácií súradníc C_U^L bodov U_j určených v lokálnej geodetickej sieti (v lokálnom dátume) pri použití podobnostnej (Helmertovej) a afinnej transformácie (Albert, 1987; Böhm et al., 1981; Nevosád, 1974, Wolfrum, 1978) na súradnice C_U^J v dátume S-JTSK.

Problematika zohľadnenia rozporov

Majme bodové pole so štruktúrou podľa obr.1, v ktorom kvôli jednoduchosti sa bude uvažovať h=3, u=2. Všetky body H_i, U_j boli zamerané v lokálnej sieti (v lokálnom dátume S^L) a boli určené ich súradnice C_{Hi}^L, C_{Uj}^L. Pre body H_i sú teda k dispozícii súradnice $C_{Hi}^J=[X\ Y]_i^J$ v dátume S-JTSK ako aj súradnice $C_{Hi}^L=[X\ Y]_i^L$ v lokálnom dátume; pre body U_j sú známe len súradnice $C_{Uj}^L=[X\ Y]_j^L$. Body U_j so svojimi konzistentnými súradnicami získanými z merania a spracovania siete determinujú akýsi "lokálny systém S-JTSK", málo odlišný svojou polohou v kartografickej zobrazovacej rovine Křovákovho zobrazenia od systému S-JTSK. Rozdielnosť oboch dátumov pramení v podstate z existujúcich deformít v JTSK (Weiss a Sütti, 1997).

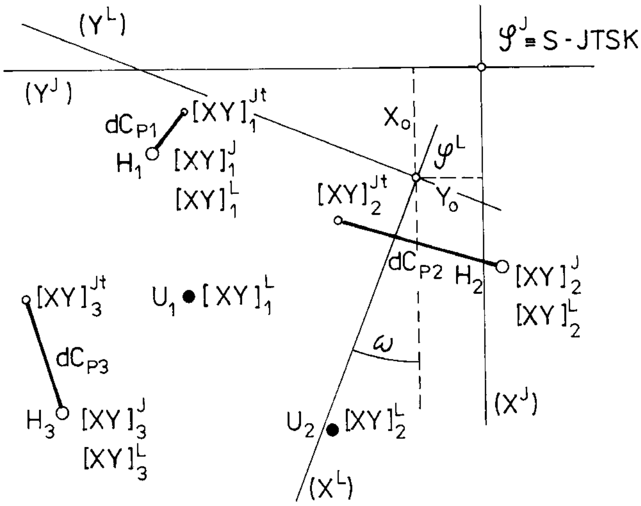
Ak zo súradníc C_H^J a C_H^L určíme transformačné parametre a súradnice C_H^L pomocou nich transformujeme do S-JTSK , dostaneme súradnice C_H^{Jt} a potom máme pre každý bod H_i dvojaké súradnice v S-JTSK, resp. z nich vytvorené súradnicové rozpory tejto transformácie

$$dC = C_H^J - C_H^{Jt} . \qquad (1)$$

Tieto rozpory sú v rozhodujúcej miere vyvolané kvalitatívnou rôznorodosťou, nehomogenitou oboch bodových polí (body H_i v systéme $S^J \equiv$ S-JTSK v danej oblasti a body nové U_j v lokálnom

[1] Katedra geodézie a geofyziky F BERG Technickej univerzity, 043 84 Košice, Park Komenského 19
(Recenzovali: Prof.Ing. Dušan Cebecauer, CSc. a Doc.Ing. Vojtech Lukovíny, CSc. Revidovaná verzia doručená 20.2.1997)

systéme S^L, tvoriace jednu zameranú sieť) a poskytujú užívateľovi informácie o dĺžkovom a uhlovom skreslení príslušnej siete, jej chybnej orientácii a o rôznych iných lokálnych deformáciách. Ak tieto rozpory dosahujú zreteľahodné hodnoty, ukazujú tým na neželanú nehomogenitu oboch bodových polí, t.j. z nich vytvorenej siete. Podľa geodetickej praxe sa musí táto nehomogenita vhodnými opatreniami vylepšiť (odstrániť sa nedá), pričom sa musia zachovať súradnice C_H^J bodov H_i [záväzné podľa zákona (Vyhláška, 1996; Zákon, 1995)]. Podstatou "nápravy" problému je potom oprava transformáciou získaných súradníc C_U^{Jt} (transformované sú súradnice C_U^L) bodov U_j na hodnoty C_U^{Jtk}, s prihliadnutím na veľkosť a rozloženie dC v bodovom poli.



Obr.1. Bodové pole s pôvodnými a transformovanými súradnicami.

Tento princíp zvýšenia homogenity spojených bodových polí do vyhovujúcej lokálnej siete v príslušnom priestore sa realizuje rôznymi metódami, pričom najčastejšie sa používa tzv. Jungova metóda (Jung, 1938). Je však možné stručne naznačenú problematiku nehomogenity bodového poľa siete riešiť aj zásadne iným postupom, a síce tak, že sa priamo určia definitívne súradnice C_U^J (ekvivalent C_U^{Jt}) bodov U_j v rámci vhodnej, tzv. bezrozporovej transformácie, riešenej na báze vyrovnávacej procedúry.

Použitie podobnostnej transformácie

Formálne riešenie je demonštrované pre konkrétnu situáciu bodového poľa podľa obr.1. Vyjdeme zo známych súradnicových transformačných rovníc podobnostnej transformácie (Albert, 1987; Böhm, 1981; Nevosád, 1974) (pre jeden bod)

$$X^J = X_o^J + m\cos\omega\, X^L - m\sin\omega\, Y^L,$$
$$Y^J = Y_o^J + m\cos\omega\, Y^L - m\sin\omega\, X^L,$$

v ktorých X_o, Y_o, m, ω sú neznáme transformačné parametre (význam X_o, Y_o, ω je zrejmý z obr.1 a m je koeficient dlžkového skreslenia). Rovnice (2) napíšeme pre ľubovoľnú dvojicu homologického a určovaného bodu H_i a U_j a vytvoríme ich súradnicové rozdiely

$$X_{Hi}^J - X_{Uj}^J = X_o^J + m\cos\omega\, X_{Hi}^L - m\sin\omega\, Y_{Hi}^L - (X_o^J + m\cos\omega\, X_{Uj}^L - m\sin\omega Y_{Uj}^L), \qquad (2a)$$

$$Y_{Hi}^J - Y_{Uj}^J = Y_o^J + m\cos\omega\, Y_{Hi}^L - m\sin\omega\, X_{Hi}^L \; (Y_o^J + m\cos\omega\, Y_{Uj}^L - m\sin\omega\, X_{Uj}^L),$$

alebo ak označíme $a = m\cos\omega$, $b = m\sin\omega$ ("kvázitransformačné parametre"), dostávame transformačné rovnice so súradnicovými rozdielmi

$$X_{Hi}^J - X_{Uj}^J = a(X_{Hi}^L - X_{Uj}^L) - b(Y_{Hi}^L - Y_{Uj}^L), \qquad (2b)$$

$$Y_{Hi}^J - Y_{Uj}^J = a(Y_{Hi}^L - Y_{Uj}^L) - b(X_{Hi}^L - X_{Uj}^L) .$$

Ako vyplýva z rovníc (2) , tieto nové transformačné rovnice z pôvodných transformačných parametrov obsahujú len m, ω resp. a, b (keďže translačné parametre X_o, Y_o nie sú v tejto transformácii potrebné) a okrem nich ako neznáme veličiny aj hľadané súradnice C_U^J. To znamená, že vzťahy (2) umožňujú priame, bezrozporové riešenie transformácií.

Rovnice typu (2) môžeme napísať pre súradnicové rozdiely medzi každým bodom U_j a všetkými (resp. len vybranými) bodmi H_i , t.j. celkove je potrebných n=2.h.u rovníc (v danom prípade n´=2.3.2=12 rovníc)

$$
\begin{aligned}
X_{H1}^J - X_{U1}^J &= a(X_{H1}^L - X_{U1}^L) - b(Y_{H1}^L - Y_{U1}^L),\\
Y_{H1}^J - Y_{U1}^J &= a(Y_{H1}^L - Y_{U1}^L) - b(X_{H1}^L - X_{U1}^L),\\
X_{H2}^J - X_{U1}^J &= a(X_{H2}^L - X_{U1}^L) - b(Y_{H2}^L - Y_{U1}^L),\\
Y_{H2}^J - Y_{U1}^J &= a(Y_{H2}^L - Y_{U1}^L) - b(X_{H2}^L - X_{U1}^L),\\
X_{H3}^J - X_{U1}^J &= a(X_{H3}^L - X_{U1}^L) - b(Y_{H3}^L - Y_{U1}^L),\\
Y_{H3}^J - Y_{U1}^J &= a(Y_{H3}^L - Y_{U1}^L) - b(X_{H3}^L - X_{U1}^L),\\
&\text{- - - - - - - - - - - - - - - -}\\
X_{H1}^J - X_{U2}^J &= a(X_{H1}^L - X_{U2}^L) - b(Y_{H1}^L - Y_{U2}^L),\\
Y_{H1}^J - Y_{U2}^J &= a(Y_{H1}^L - Y_{U2}^L) - b(X_{H1}^L - X_{U2}^L),\\
&\vdots\\
X_{H3}^J - X_{U2}^J &= a(X_{H3}^L - X_{U2}^L) - b(Y_{H3}^L - Y_{U2}^L),\\
Y_{H3}^J - Y_{U2}^J &= a(Y_{H3}^L - Y_{U2}^L) - b(X_{H3}^L - X_{U2}^L),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

ktoré umožňujú určovať súradnice C_U^J pomocou vhodného odhadovacieho modelu, ktorý sa najčastejšie volí v tvare Gaussovho - Markovovho modelu (GMM). Preurčený systém rovníc (4) vzniká vtedy , ak pri počte u určovaných bodov (keď počet určovaných parametrov bude k = 2.u+2), bude pre úlohu použitých h > u+1 homologických bodov.

Rovnice (3) je možné zapísať v maticovom tvare

$$C_H^J = C_U^J + A\theta \,, \tag{4}$$

kde u.2h rozmerný vektor $C_H^J = [(C_H^J)^T\ (C_H^J)^T]$ predstavuje u blokov 2h súradníc C_H^J homologických bodov, u.2h rozmerný vektor $C_U^J = [(C_{U1}^J)^T\ (C_{U2}^J)^T]$ obsahuje 2h krát uvádzané súradnice každého bodu U_j , u.2h x k rozmerná matica koeficientov A má štruktúru

$$
A=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & (X_{H1}^L - X_{U1}^L) & -(Y_{H1}^L - Y_{U1}^L)\\
0 & 1 & 0 & 0 & (Y_{H1}^L - Y_{U1}^L) & (X_{H1}^L - X_{U1}^L)\\
1 & 0 & 0 & 0 & (X_{H2}^L - X_{U1}^L) & -(Y_{H2}^L - Y_{U1}^L)\\
0 & 1 & 0 & 0 & (Y_{H2}^L - Y_{U1}^L) & (X_{H2}^L - X_{U1}^L)\\
\vdots & & & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & (X_{H3}^L - X_{U2}^L) & -(Y_{H3}^L - Y_{U2}^L)\\
0 & 0 & 0 & 1 & (Y_{H3}^L - Y_{U2}^L) & (X_{H3}^L - X_{U2}^L)
\end{bmatrix}
\tag{5}
$$

a k rozmerný vektor

$$\theta^T = [X_{U1}^J\ \ Y_{U1}^J\ \ X_{U2}^J\ \ Y_{U2}^J\ \ a\ \ b] \tag{6}$$

obsahuje hľadané súradnice C_U^J bodov U_j ako i časť transformačných parametrov.

Koncepcia transformácií súradníc v geodézii všeobecne predpokladá (Benning, 1995; Böhm, 1981; Wolf, 1968; Wolfrum, 1978), že nemeniteľné súradnice homologických bodov, v danom prípade C_H^J , sa budú považovať za "observácie". Rovnice (4) teda predstavujú deterministický model riešenia úlohy a potom jej odpovedajúci stochastický (Gaussov - Markovov) model s označením $C_H^J = L$ bude

$$E(L) = A.\theta,$$
$$V(L) = \sigma_o^2 Q_L,$$

kde operátory E(.),V(.) značia strednú hodnotu a varianciu, σ_o^2 je apriórny variančný faktor a Q_L je kofaktorová matica "observácií". Odpovedajúci odhadovací (štatistický) model je

$$v = A\,\hat{\Theta} - L, \qquad (7)$$
$$\Sigma_L = \sigma_o^2 Q_L.$$

V stochastickej zložke modelu sa obvykle vezme $\sigma_o^2 = 1$, $Q_L = I_{(2hu)}$, teda jednotkové kofaktory, resp. váhy, čo značí , že každá súradnica bodov H_i sa pre určenie odhadov C_U^J bude považovať za rovnocennú.

Na základe modelu (7) sa potom určia:

-odhady parametrov $\hat{\Theta}$, teda aj odhady súradníc $\hat{C}_U^J$

$$\hat{\Theta} = \begin{bmatrix} \hat{X}_1^J \\ \hat{Y}_1^J \\ \hat{X}_2^J \\ \hat{Y}_2^J \\ \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T L, \qquad (8a)$$

-"opravy" súradníc C_H^J

$$v = A\,\hat{\Theta} - L = C_H^{Jt} - C_H^J, \qquad (8b)$$

-aposteriórny variančný faktor

$$s_o^2 = v^T Q_L^{-1} v / (n-k), \qquad (8c)$$

-kovariančná matica vektora odhadov, obsahujúca všetky informácie o presnosti odhadov, t.j. aj súradníc $\hat{C}_U^J$

$$\Sigma_{\hat{\Theta}} = s_o^2 (A^T Q_L^{-1} A)^{-1}, \qquad (8d)$$

prípadne ďalšie veličiny.

Použitie afinnej transformácie

Výpočet odhadov transformačných parametrov $\hat{\Theta}$ a spolu s nimi odhadov súradníc $\hat{C}_U^J$ bodov U_j je pri použití afinnej transformácie analogický ako postup, ktorý je uvedený pre podobnostnú transformáciu.

Transformačné rovnice afinnej transformácie (pre ľubovoľný bod) sú (Albert, 1987; Böhm, 1981; Wolf, 1989; Wolfrum, 1978)

$$X^J = X_o^J + m_x \cos\omega_x X^L - m_x \sin\omega_x Y^L,$$
$$Y^J = Y_o^J + m_y \cos\omega_y Y^L - m_y \sin\omega_y X^L, \qquad (9a)$$

alebo

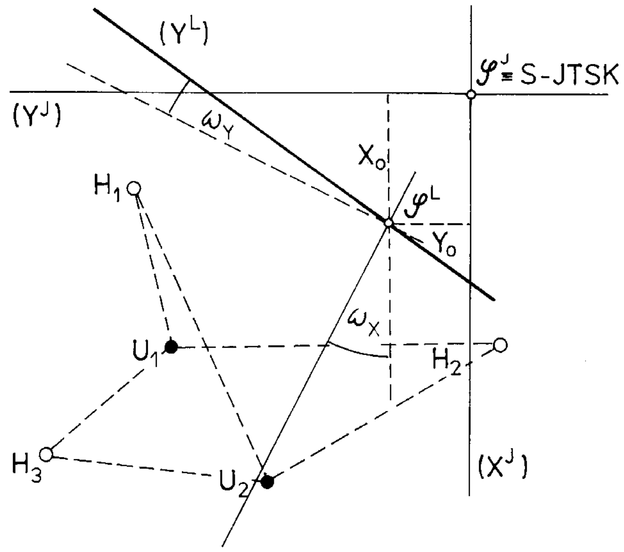
$$X^J = X_o^J + a_1 X^L - a_2 Y^L,$$
$$Y^J = Y_o^J + b_1 Y^L - b_2 X^L, \qquad (9b)$$

kde X_o, Y_o, m_x, m_y, ω_x, ω_y je 6 transformačných parametrov afinnej transformácie, z ktorých m_x , m_y sú dĺžkové moduly (vyjadrujú pomer dĺžok z oboch systémov v smere súradnicových osí) a význam (geometrický) ostatných je zrejmý z obr.2.

Ak rovnice typu (9b) napíšeme pre H_i a U_j a odpovedajúce si súradnice vzájomne odčítame , dostaneme

$$X_{Hi}^J - X_{Uj}^J = a_1(X_{Hi}^L - X_{Uj}^L) - a_2(Y_{Hi}^L - Y_{Uj}^L),$$

$$Y_{Hi}^J - Y_{Uj}^J = b_1(Y_{Hi}^L - Y_{Uj}^L) - b_2(X_{Hi}^L - X_{Uj}^L). \qquad (10)$$



Obr. 2. Afinitná transformácia pre súradnicové rozdiely.

Rovnice (10) majú rovnakú štruktúru ako (2b) s tým rozdielom, že obsahujú 4 transformačné parametre , t.j. aj v tomto prípade sa transformácie realizujú bez translačných prvkov X_o,Y_o . Rovnice typu (10) je možné napísať opäť pre súradnicové rozdiely medzi každým U_j a všetkými H_i , teda celkove sa vytvorí n = u.2.h rovníc (v danom prípade n=12)

$$X_{H1}^J - X_{U1}^J = a_1(X_{H1}^L - X_{U1}^L) - a_2(Y_{H1}^L - Y_{U1}^L),$$

$$Y_{H1}^J - Y_{U1}^J = b_1(Y_{H1}^L - Y_{U1}^L) - b_2(X_{H1}^L - X_{U1}^L),$$

$$X_{H2}^J - X_{U1}^J = a_1(X_{H2}^L - X_{U1}^L) - a_2(Y_{H2}^L - Y_{U1}^L),$$

$$Y_{H2}^J - Y_{U1}^J = b_1(Y_{H2}^L - Y_{U1}^L) - b_2(X_{H2}^L - X_{U1}^L),$$

$$X_{H3}^J - X_{U1}^J = a_1(X_{H3}^L - X_{U1}^L) - a_2(Y_{H3}^L - Y_{U1}^L),$$

$$Y_{H3}^J - Y_{U1}^J = b_1(Y_{H3}^L - Y_{U1}^L) - b_2(X_{H3}^L - X_{U1}^L), \qquad (11)$$

- -

$$X_{H1}^J - X_{U2}^J = a_1(X_{H1}^L - X_{U2}^L) - a_2(Y_{H1}^L - Y_{U2}^L),$$

$$Y_{H1}^J - Y_{U2}^J = b_1(Y_{H1}^L - Y_{U2}^L) - b_2(X_{H1}^L - X_{U2}^L),$$

$$\vdots$$

$$X_{H3}^J - X_{U2}^J = a_1(X_{H3}^L - X_{U2}^L) - a_2(Y_{H3}^L - Y_{U2}^L),$$

Y_{H3}^{J}-Y_{U2}^{J} = $b_1(Y_{H3}^{L} - Y_{U2}^{L}) - b_2(X_{H3}^{L} - X_{U2}^{L})$,

ktoré, keďže budú tvoriť pre určovaný počet parametrov k = 2.u+4 preurčený systém, dovoľujú riešiť parametre, t.j. aj súradnice C_U^J i v tomto prípade na báze Gaussovho - Markovovho modelu. Aby bol systém lineárnych rovníc (11) preurčený , pri počte u určovaných bodoch je potrebné použiť h > u+2 homologických bodov.

Z rovníc (11) aj teraz postupne dospejeme k odpovedajúcemu štatistickému modelu

$$v = A.\hat{\Theta} - L = C_H^{Jt} - C_H^{J},$$
$$\Sigma_L = \sigma_o^2 Q_L, \qquad (12)$$

kde u.2.h rozmerný vektor

$$L^T=(C_H^J)^T=[X_{H1}Y_{H1}\ X_{H2}Y_{H2}...X_{Hh}Y_{Hh}\quad X_{H1}Y_{H1}\ X_{H2}Y_{H2}...X_{Hh}Y_{Hh}]^J \qquad (13)$$

sú observácie, t.j. súradnice C_H^J v S-JTSK (ktoré sú platné a záväzné pre body H_i), u.2h rozmerný vektor

$$v^T = [v_{x1}v_{y1}\ v_{x2}v_{y2}\ ...\ v_{xh}v_{yh}\quad v_{x1}v_{y1}\ v_{x2}v_{y2}\ ...\ v_{xh}v_{yh}] \qquad (14)$$

sú opravy observácií (t.j. opravy súradníc C_H^J , ktoré s týmito opravami dávajú hodnoty C_H^{Jt}), u.2h x k rozmerná matica

$$A = \begin{bmatrix}
1\,0\,0\,0 & X_{H1}^L - X_{U1}^L & -(Y_{H1}^L - Y_{U1}^L) & 0 & 0 \\
0\,1\,0\,0 & 0 & 0 & X_{H1}^L - X_{U1}^L & Y_{H1}^L - Y_{U1}^L \\
1\,0\,0\,0 & X_{H2}^L - X_{U1}^L & -(Y_{H2}^L - Y_{U1}^L) & 0 & 0 \\
0\,1\,0\,0 & 0 & 0 & X_{H2}^L - X_{U1}^L & Y_{H2}^L - Y_{U1}^L \\
1\,0\,0\,0 & X_{H3}^L - X_{U1}^L & -(Y_{H3}^L - Y_{U1}^L) & 0 & 0 \\
0\,1\,0\,0 & 0 & 0 & X_{H3}^L - X_{U1}^L & Y_{H3}^L - Y_{U1}^L \\
\hline
1\,0\,0\,0 & X_{H1}^L - X_{U2}^L & -(Y_{H1}^L - Y_{U2}^L) & 0 & 0 \\
0\,1\,0\,0 & 0 & 0 & X_{H1}^L - X_{U2}^L & Y_{H1}^L - Y_{U2}^L \\
\vdots & & & & \\
1\,0\,0\,0 & X_{H3}^L - X_{U2}^L & -(Y_{H3}^L - Y_{U2}^L) & 0 & 0 \\
0\,1\,0\,0 & 0 & 0 & X_{H3}^L - X_{U2}^L & Y_{H3}^L - Y_{U2}^L
\end{bmatrix} \qquad (15)$$

obsahuje koeficienty a k rozmerný vektor

$$\hat{\Theta}^T = \left[\hat{X}_{U1}^J \quad \hat{Y}_{U1}^J \quad \hat{X}_{U2}^J \quad \hat{Y}_{U2}^J \quad \hat{a}_1 \quad \hat{a}_2 \quad \hat{b}_1 \quad \hat{b}_2\right] \qquad (16)$$

obsahuje odhady parametrov.

Pre tvorbu matíc Q_L , σ_o^2 platia tie isté pravidlá, ktoré boli uvedené pre podobnostnú transformáciu.

Na posúdenie presnosti $\hat{\Theta}$ a vlastností afinnej transformácie aj v danom prípade sa určujú veličiny v, s_o , $\Sigma_{\hat{\Theta}}$ prípadne ďalšie.

Niektoré vlastnosti transformácií so súradnicovými rozdielmi

Poukážeme na niektoré zvláštnosti riešenia GMM, zostaveného z transformačných rovníc (3), resp. (11), používajúcich súradnicové rozdiely. Ako zreteľahodné zvláštnosti bezrozporového riešenia transformácií, najmä pri jeho praktickej realizácii a hodnotení, možno považovať nasledovné poznatky:

a) štruktúru matice A je možné členiť, resp. vytvoriť z počtu u blokov, pričom každý blok pozostáva z h dvojíc transformačných rocníc (3) resp. (11) , t.j. v každom bloku s 2h rovnicami sú ich členy tvorené zo súradníc jedného určovaného bodu U_j a súradníc všetkých, (resp. vybraných) bodov H_i v podobe súradnicových rozdielov , pričom algoritmus tvorby týchto prvkov v rovniciach je zrejmý zo štruktúry (3) a (11).

b) opravy "v" sú v každom bloku navzájom identické, t.j. pre štruktúru opráv v u.2h rozmernom vektore **v** a v 2h rozmerných blokoch opráv **vb** platí

$$v = \begin{bmatrix} v_{b1} \\ v_{b2} \\ \vdots \\ v_{bh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{b1x} & v_{b1y} \\ v_{b2x} & v_{b2y} \\ \vdots & \vdots \\ v_{bhx} & v_{bhy} \end{bmatrix} , \qquad (17)$$

$v_{b1} = v_{b2} = ... = v_{bh}$

a pre h rozmerné vektory opráv X-ových a Y-ových súradníc v blokoch platí

$$v_{b1x} = v_{b2x} = ... = v_{bhx}, \\ v_{b1y} = v_{b2y} = ... = v_{bhy}. \qquad (18)$$

Aj v týchto transformáciach platia známe kontrolné vzťahy pre opravy (Böhm, 1981; Wolf, 1968), podľa ktorých bude

$$\begin{aligned} &\mathrm{sum}(v) = 0, \\ &\mathrm{sum}(v_{b1}) = \mathrm{sum}(v_{b2}) = ... = \mathrm{sum}(v_{bh}) = 0, \\ &\mathrm{sum}(v_{b1x}) = \mathrm{sum}(v_{b2x}) = ... = \mathrm{sum}(v_{bhx}) = 0, \\ &\mathrm{sum}(v_{b1y}) = \mathrm{sum}(v_{b2y}) = ... = \mathrm{sum}(v_{bhy}) = 0. \end{aligned} \qquad (19)$$

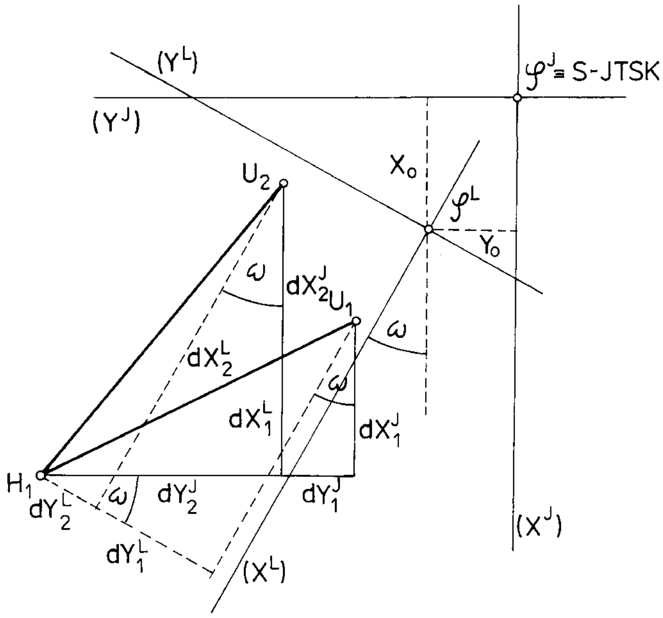
Všeobecná platnosť numerickej identity opráv v blokoch sa dá ukázať aj graficky. Napr. pre v_{x1} z rovnice č.1 (bod U_1,blok č.1) a z rovnice č.7 v (3) (bod U_2, blok č.2) príslušná geometria vzťahov vyplýva z obr.3, z ktorého vidno, že súradnicu X_{H1} bodu H_1 v S^J určenú z bodov U_1 , U_2 je možné napísať pomocou rovníc

$$X^J_{H1} = X^J_{U1} + dX^J_1, \\ X^J_{H1} = X^J_{U2} + dX^J_2 , \qquad (20)$$

kde dX^J_1 ,dX^J_2 sú vyjadrené pomocou dX^L_1, dX^L_2 v zmysle

$$dX^J_1 = a\,(X^L_{H1} - X^L_{U1}) - b\,(Y^L_{H1} - Y^L_{U1}),$$

$$dX_2^J = a\,(X_{H1}^L - X_{U2}^L) - b\,(Y_{H1}^L - Y_{U2}^L) \qquad (21)$$



Obr. 3. Geometria transformačných rovníc.

a dosadené do (20). V týchto rovniciach (deterministického charakteru pre riešenie úlohy) teoretické hodnoty observácií X^J_{H1} sa rozložia na: meraná hodnota + oprava (v_{X1}), ktorá bude vystupovať v oboch rovniciach,

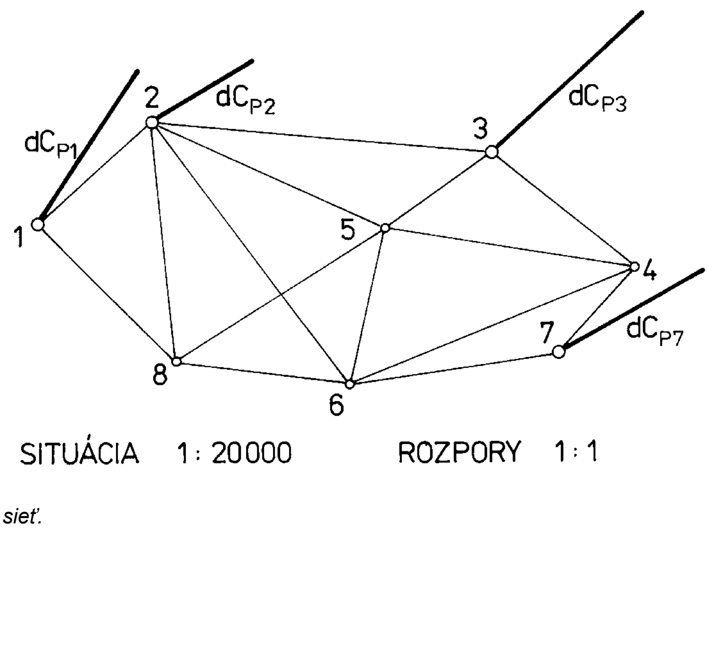
c) opravy v súradníc C_H^J z geometrického hľadiska predstavujú vlastne rozpory na homologických bodoch H_i (z každého bloku identické),t.j. rozdiely "platných" súradníc C_H^J a súradníc $C_H^J = A.\hat{Q}$, ktoré sú vytvorené danou transformáciou. Opravy v charakterizujú teda mieru nehomogénnosti v interakcii oboch sietí (bodových polí), t.j. JTSK a lokálnej siete resp. lokálne deformity JTSK v danej oblasti.

d) pre smerodajné odchýlky $s_{\hat{X}U}, s_{\hat{Y}U}$ odhadov súradníc určovaných bodov U platí

$$s_{\hat{X}U} = s_{\hat{Y}U}, \qquad (22)$$

čo nie je ťažké dokázať na základe štruktúry prvkov kofaktorovej matice $Q_{\hat{C}U}$. Určované body sú teda z hľadiska polohovej presnosti charakterizované konfidenčnými kružnicami.

Demonštračný príklad



Obr. 4. Lokálna polohová sieť.

Majme bodové pole s homologickými bodmi H_i, $i \in \langle 1,2,3,7 \rangle$ a určovanými bodmi U_j, $j \in \langle 4,5,6,8 \rangle$ (obr.4), ktoré boli v rámci lokálnej siete zamerané a boli pre ne určené súradnice C_H^L, C_U^L, pričom súradnice C_H^J (S-JTSK) pre body H_i sú tiež známe (tab.1).

Bod	X^L	Y^L
1	2000.000	3210.389
2	2358.992	1467.215
3	2832.206	2436.892
4	2000.000	2000.000
5	2331.440	2371.803
6	2654.731	1725.447
7	2829.238	3028.401
8	2443.675	3573.316
	X^J	Y^J
1	1239001.1370	264506.3290
2	1239502.4944	262798.6135
3	1239894.2212	263803.9862
7	1239842.5571	264393.2504

Tab. 1. Súradnice bodového poľa.

Cieľom je určiť súradnice C_U^J bodov U_j v S-JTSK bezrozporovou transformáciou ($C_U^L \rightarrow C_U^J$) použijúc podobnostné i afinné riešenie.

Z týchto transformácií podľa kap.2 a 3 dostávame výsledky (tab.2), z ktorých význam $\hat{C}_U^J, s_o, s_{\hat{C}U}$ je zrejmý. Veličiny dC_U predstavujú rozdiely medzi súradnicami C_U^L a $\hat{C}_U^J$, ktoré z významového hľadiska je možné považovať za kváziopravy súradníc C_U^L vytvorené automaticky v procese vyrovnania.

Na porovnanie výsledkov s korekčnými metódami riešenia definitívnych súradníc bodov U_j, boli po štandardnej (so súradnicami) afinnej transformácii a určení rozporov dC_H na bodoch H_i vypočítané Jungovou metódou opravy δC súradníc C_U^L a určené korigované, definitívne súradnice C_U^{Jtk} bodov U_j.

Veličina		Podobnostná transformácia		Afinná transformácia		Jungova metóda	
C_U^J [m]	Bod	X	Y	X	Y	X	Y
	4	1239100.835	263300.031	.827	.030	.829	.028
	5	1239400.525	263697.874	.522	.874	.524	.874
	6	1239775.956	263080.329	.957	.333	.948	.567
	8	1239413.414	264904.569	.415	.566	.424	.567
s_o [mm]		47.029		4,877			
s_X ,s_Y [mm]	4	3.806	3.806	3.193	3.193		
	5	3.470	3.470	2.535	2.535		
	6	3.895	3.895	2.892	2.892		
	8	4.146	4.146	3.069	3.069		
dC_U ,dC_H [mm]	4 1	5.0	16.0	2.3	-14.5	-27.7	-16.2
	5 2	16.4	-26.2	-3.9	26.8	-9.1	-19.3
	6 3	-21.6	16.8	21.4	-20.1	-27.7	-22.7
	8 7	-34.6	-12.5	33.2	16.0	-17.9	-23.3

Tab. 2. Výsledky transformácií lokálnej siete do S-JTSK.

Záver

I keď sa z analýzy jednej, náhodne použitej lokálnej siete nedajú prijať všeobecne platné závery pre všeobecné vlastnosti bezrozporových transformácií, predsa sa niektoré výsledky zdajú byť významné.

Výsledky z uplatnenia podobnostnej a afinnej transformácie aj bezrozporovým riešením ukazujú predovšetkým na známe prednosti afinnej transformácie, ktorá dáva menšie hodnoty opráv, t.j. poskytuje lepšiu determináciu nehomogenít v JTSK v danej oblasti, menšie hodnoty s_o a smerodajných odchýlok odhadov súradníc.

Riešenie a výsledky ďalej ukazujú na :

- definitívne súradnice afinne transformovaných bodov sú bližšie k súradniciam získaným Jungovou metódou,
- použitie rôzne definovaných váh dáva súradnice vzájomne odlišné v rozpätí 10 - 15 mm pri použití ktorejkoľvek transformácie (výsledky nie sú prezentované),
- pri zvýšení počtu u transformovaných bodov U_j , t.j. zvýšením počtu blokov v matici A, s_o bude asymptoticky klesať k určitej limitnej hodnote ,
- bezrozporové transformácie nie sú ani z matematického ani z numerického hľadiska náročné a možno ich programove podporiť bez problémov.

Je však zrejmé, že použiteľnosť bezrozporových transformácií je potrebné ďalej teoreticky i empiricky skúmať.

Literatúra

Albert, P.: Koordinatentransformationen in der Ingenieurgeodäsie I., II. *Vermessungstechnik, 35 (1987), 7, 242-244; 9 , 313-315.*

Benning, W.: Nachbarschaftstreue Restklaffungsverteilung für Koordinatentransformationen. *Zeitsch. f .Verm. Wesen, 120 (1995), 1, 16-25.*

Böhm, J. et al.: Vyšší geodézie.Díl 2. *ČVUT Praha 1981.*

Jung, A.: Die Verknüpfung selbständiger Dreiecksnetze nach der Methode der kleinsten Quadrate. *Allg.Verm.Nachrichten, 1938, 3 , 121-129.*

Nevosád, Z.: Základní souřadnicové výpočty v geodézii. II.díl. *VAAZ, Brno 1974.*

Vyhláška UGKK SR č.178/*1996 Z.z., ktorou sa vykonáva zákon NR SR o geodézii a kartografii.*

Weiss, G. A Sütti,J.: Geodetické lokálne siete I. *F BERG TU Košice, 1997.*

Wolf, H.: Deformierte Ähnlichkeitstransformation. *Allg.Verm.Nachrichten, 96 (1989), 10, 361-365.*

Wolf, H.: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. *Dümmler, Bonn 1968.*

Wolfrum, O. : Die Verzerrungseigenschaften der affinen Transformation. *Allg.Verm.Nachrichten, 85 (1978), 10, 367-374.*

Zákon NR SR č.215/1995 *Z.z. o geodézii a kartografii.*