

Väzbové polygónové siete

Gabriel Weiss¹, Milan Šadera¹ a Juraj Gašinec¹

Traverse nets with constraints

Station coordinates of a superior (national) network are usually effected by various strains and other deformations originated in its development and during its being. Traverse networks connected to stations (datum points) of such a net are then deformed (inner geometrical structure of the constrained net) and their coordinates are biased.

Key words: column singularity of the configuration matrix, constrained model of adjusting, effect of deformed superior net

Úvod

Pri vytváraní, resp. zhusťovaní geodetických bodových polí v lokálnych priestoroch je možné použiť trigonometrické i polygónové sieťové štruktúry a pripojenie nových bodov do nadradenej (národnej) siete (NS) vykonať väzbovým alebo transformačným spôsobom. Pri väzbovom riešení súradnicové chyby v bodoch NS, ktoré vznikajú pri jej tvorbe, resp. pri jej zmenách (napr. recentné pohyby zemskej kôry), nepriaznivo ovplyvňujú pripojenie nových bodových polí (lokálnych sietí), pretože všetky súčasné, presné merania, sú v odhadovacej procedúre prispôbené súradniciam dátumových bodov. O tomto fenoméne, ktorý sa viac prejavuje v polygónových, ako trigonometrických štruktúrach (Weiss, 1991; Weiss et al., 1997), pojednáva tento príspevok.

Všeobecný model vyrovnania polygónových štruktúr

Z Gauss-Markovovho modelu (GMM) odhadovacej procedúry

$$E(L) = A \cdot c, \quad D(L) = \sigma_o^2 \cdot P_L^{-1} \quad (1)$$

vyplýva štandardný model vyrovnania v tvare:

$$\begin{aligned} v &= A \cdot dc - dl, & (\text{funkcionálna časť}) \\ \Sigma &= \sigma_o^2 \cdot Q_l, & (\text{stochastická časť}) \end{aligned} \quad (2)$$

kde

$d\hat{c}^T = [d\hat{x}_1, d\hat{y}_1, \dots, d\hat{x}_k, d\hat{y}_k]^T$ je vektor odhadov k parametrov (súradníc) $k/2$ bodov polygónovej štruktúry,

$dl = l - \hat{l}$ je n - rozmerný vektor rozdielov medzi nameranými hodnotami prvkov l (realizačný, observačný vektor) a ich približnými hodnotami \hat{l} ,

v je n - rozmerný vektor opráv

¹ Doc.Ing. Gabriel Weiss, CSc., Ing. Milan Šadera, Ing. Juraj Gašinec, CSc., Katedra geodézie a geofyziky F BERG Technickej univerzity v Košiciach, 043 84 KOŠICE, Park Komenského 19
(Recenzenti: Doc.Ing. Ján Čirbus, CSc. a Ing. Michal Badida, CSc. Revidovaná verzia doručená 18.6.1997)

$$\mathbf{A} = \left[\frac{\mathbf{a}(\mathbf{c}, \dots)}{\hat{\mathbf{c}}} \right]_{\mathbf{c}=\mathbf{c}^0} \quad \text{je } (n \times k) \text{ rozmerná matica koeficientov (konfiguračná matica polygómovej}$$

štruktúry), s hodnotou $\text{rk}(\mathbf{A}) = k$, $k < n$, v ktorej existujú medzi meranými prvkami l a súradnicami c polygómových bodov vzťahy

$$l = \mathbf{f}(\mathbf{c}, \dots), \quad (3)$$

vyjadrené v 2D polygómových štruktúrach ako

$$d_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}, \quad (4)$$

$$\omega_{ijk} = \sigma_{jk} - \sigma_{ij} = \arctg \frac{y_k - y_j}{x_k - x_j} - \arctg \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i},$$

$\mathbf{Q}_l = \text{diag}(Q_{d_{ij}}, \dots, Q_{\omega_{ijk}}, \dots)$ je $(n \times n)$ rozmerná diagonálna, pozitívne definitná matica kofaktorov meraných prvkov v štruktúre (predpokladajú sa navzájom stochasticky nezávislé merania),

σ_0^2 je jednotková apriórna variancia heterogénneho súboru nameraných hodnôt l ,

$\Sigma_l = \text{diag}(\sigma_{d_{ij}}^2, \dots, \sigma_{\omega_{ijk}}^2, \dots)$ je $(n \times n)$ rozmerná diagonálna, pozitívne definitná kovariančná matica vektora l .

Riešenie tohoto modelu metódou najmenších štvorcov (MNS) potom poskytuje najlepšie odhady :

$$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c}^0 + \mathbf{d}\hat{\mathbf{c}}, \quad \mathbf{d}\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{Q}_l^{-1} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{Q}_l^{-1} \cdot \mathbf{d}l,$$

$$\mathbf{v},$$

$$\Omega = \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{Q}_l^{-1} \cdot \mathbf{v},$$

$$s_0^2 = \Omega / (n - k),$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{c}}}, \text{ resp. } \Sigma_{\hat{\mathbf{c}}} = s_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{c}}} = s_0^2 \cdot \mathbf{N}^{-1}$$

a ďalšie potrebné hodnoty a charakteristiky (Gotthard, 1978; Pelzer, 1985; Wolf, 1968), napr. vyrovnané hodnoty meraných prvkov a ich presnosné charakteristiky

$$\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{I}^0 + \mathbf{v},$$

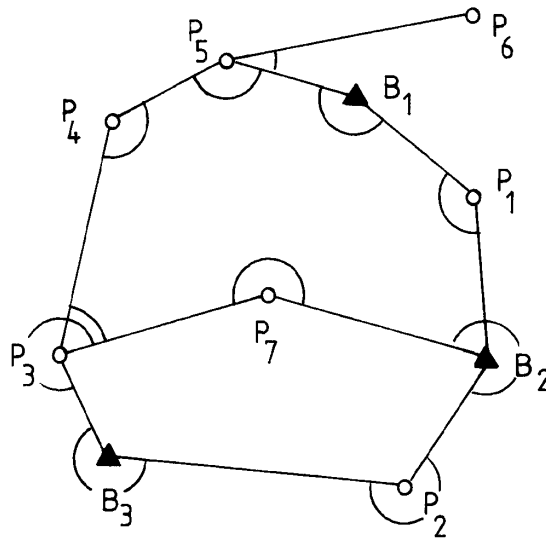
$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{I}}}, \text{ resp. } \Sigma_{\hat{\mathbf{I}}} = s_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{I}}}$$

a pod.

Vázbové siete

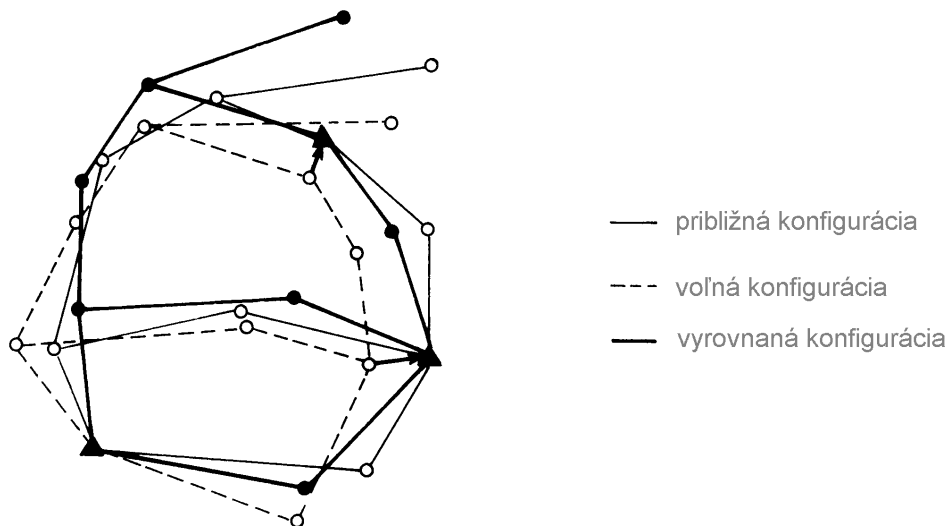
Majme polygómovú sieť (obr.1), pre ktorú vieme (bez ohľadu na charakter bodov tvoriacich sieť) zostaviť všeobecnú konfiguračnú maticu (maticu tvaru siete) \mathbf{A} o rozmere 23×20 . Takto pre všetky body príslušnej siete, zostavená matica \mathbf{A} je singulárna (Weiss, 1991; Weiss et al., 1997).

Ak pri vyrovnaní polygórovej siete zohľadníme všetky dátumové parametre (dp), t.j. súradnice c_D daných bodov B (alebo len vybranú, zvolenú skupinu parametrov $dp_i < dp$, odpovedajúcu bodom B_i)



Obr.1. Polygónová sieť.

tak, že bude platiť $dp > DP$, pre veličinu $DP=3$, predstavujúcu počet nutných dátumových parametrov pre väzbové spracovanie polygonometrickej štruktúry, potom týmto krokom v podstate pripojujeme polygónovú sieť na dané body B (alebo len na skupinu týchto bodov B_i). Pritom zameraná vnútorná štruktúra siete, tzv. jej voľná konfigurácia, musí nadväzovať na existujúce pripojené body B, resp. B_i a spĺňať všetky podmienky - väzby, ktoré z ich existencie a zohľadnenia vyplývajú.



Obr.2. Rôzne konfigurácie polygórovej siete.

Z tohoto dôvodu dátumové parametre nazývame aj vonkajšími väzbami pre príslušnú polygónovú sieť a samotnú sieť z hľadiska jej geodetického dátumu väzbovou sieťou, pričom väzby pri spracovaní siete zostávajú zachované (nemenné) (obr.2).

V takom prípade, keď platí $dp > DP$, prijatím D , resp. D_i určujeme aj dátum siete, čo znamená, že polygónová sieť je jednoznačne fixovaná v súradnicovom systéme bodov B . Jej väzbové spracovanie je teda možné a predstavuje štandardné riešenie vyrovnania pripojenej polygónovej siete.

Matematickému vyjadreniu tohto vyrovnania formou príslušného funkcionálneho a stochastického modelu (2) musí predchádzať riešenie singularitu (23 x 20) rozmernej konfiguračnej globálnej matice A polygónovej siete, ktorá má nasledovnú štruktúru:

$$\mathbf{A}_{23,20} = \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_{23} \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} x_{1P} y_{1P} & x_{2P} y_{2P} & \cdots & x_{7P} y_{7P} & x_{B1} y_{B1} & x_{B2} y_{B2} & x_{B3} y_{B3} \end{array} \right| \cdot \quad (5)$$

Stĺpcová singularita matice A s defektom $def = 3$ sa odstráni tak, že ak zo 6 stĺpcov, odpovedajúcich dátumovým bodom B_1, B_2, B_3 , vynecháme potrebný počet stĺpcov. Keďže v danom prípade chceme polygónovú sieť pripojiť na všetky tri dané (dátumové) body, vynecháme v príslušnej matici všetkých 6 stĺpcov x_{B1}, \dots, y_{B3} a docielime, že tieto body zostanú vo vyrovnaní nemenné. Potom do vyrovnávacej procedúry vstúpi konfiguračná matica A o rozmere 23 x 14 (t.j. s chýbajúcimi poslednými 6 stĺpcami).

Matematický model vyrovnania pre danú sieť (obr.1), potom bude

$$\mathbf{v}_{23,1} = \mathbf{A}_{23,14} \cdot \hat{d\mathbf{c}}_{14,1} - d\mathbf{l}_{23,1},$$

$$\mathbf{\Sigma}_{23,23} = \sigma_o^2 \cdot \mathbf{Q}_{23,23},$$

pričom odhady súradníc polygónových bodov dostávame z vyrovnania

$$d\hat{\mathbf{c}}_P^T = [d\hat{x}_1 \ d\hat{y}_1 \quad d\hat{x}_2 \ d\hat{y}_2 \quad \cdots \quad d\hat{x}_7 \ d\hat{y}_7]^T \quad (6)$$

a súradnice daných (dátumových) bodov

$$\mathbf{c}_D^T = [x_{B1} \ y_{B1} \quad x_{B2} \ y_{B2} \quad x_{B3} \ y_{B3}]^T \quad (7)$$

zostávajú nezmenené. Presnosť vektora (6) bude charakterizovať kovariančná matica

$$\mathbf{\Sigma}_{\hat{c}_P} = s_o^2 (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{Q}_1^{-1} \cdot \mathbf{A})^{-1}.$$

Príklad

V 2D polygónovej sieti podľa obr. 3, boli zamerané všetky jej merateľné prvky, t.j. vodorovné a jednostranné vrcholové uhly v počte $n=17$. Vytvorený observačný vektor

$$\mathbf{l}^T = [32.330 \ 25.280 \ 24.001 \ 39.456 \ 38.003 \ 67.197 \ 34.361 \ 43.867 \ 313.6455 \ 171.7416 \ 127.0439 \ 291.0097 \ 239.9600 \ 264.6985 \ 68.6207 \ 282.6505 \ 236.2962],$$

pre komponenty ktorého bola vytvorená kofaktorová matica

$$\mathbf{Q}_1 = \text{diag}(0.4248 \ 0.4070 \ 0.4038 \ 0.4432 \ 0.4394 \ 0.5186 \ 0.4300 \ 0.4548 \ 1.3846 \ 1.3846 \quad 1.3846 \ 1.3846 \ 1.3846 \ 1.3846 \ 1.3846 \ 1.3846 \ 1.3846),$$

s kofaktormi určenými pomocou vzťahov $q_{d_i} = \frac{\sigma_{di}^2}{\sigma_o^2}$, $q_{\omega_i} = \frac{\sigma_{\omega_i}^2}{\sigma_o^2}$.

Z odhadovacej procedúry na základe modelu (2), v ktorom konfiguračná matica A má štruktúru

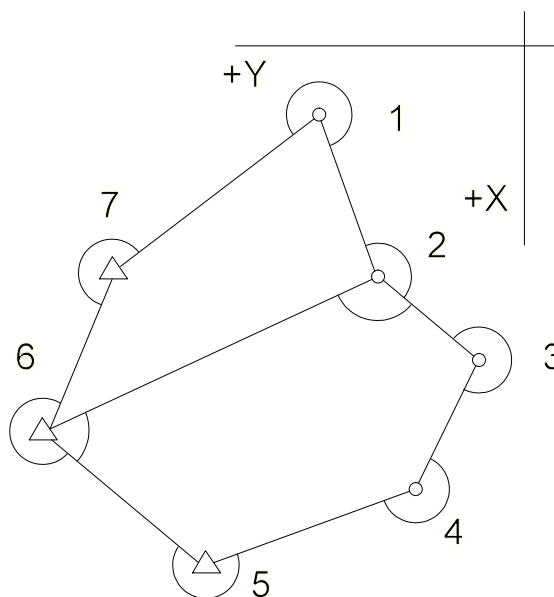
$$A = \begin{bmatrix} -0.93241 & 0.36143 & 0.93241 & -0.36143 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.68683 & 0.72682 & 0.68683 & -0.72682 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.81625 & -0.57767 & 0.81625 & 0.57767 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.32142 & 0.94693 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.92534 & -0.37914 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.55149 & -0.83418 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -19.22375 & -10.35864 & 7.11772 & 18.36209 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7.11772 & 18.36209 & -25.42104 & -35.65830 & 18.30332 & 17.29621 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -27.06992 & -13.70427 & 18.30332 & 17.29621 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18.30332 & 17.29621 & -2.98023 & -38.94792 & -15.32309 & 21.65171 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -15.32309 & 21.65171 & 30.60172 & -26.83782 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15.27863 & -5.18611 \\ 0 & 0 & -8.76660 & 3.59194 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12.10603 & 8.00346 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

bolo vypočítané k=8 odhadov súradníc bodov 1, 2, 3, 4 siete, t.j. vektor

$$\hat{c} = \begin{bmatrix} 1238256.458 \\ 263786.114 \\ 1238286.600 \\ 263774.430 \\ 1238303.963 \\ 263756.056 \\ 1238323.553 \\ 263769.920 \end{bmatrix} ,$$

a kovariančná matica týchto odhadov

$$\Sigma_{\hat{c}} = \text{diag}(1.22404 \ 2.77513 \ 0.67067 \ 3.22563 \ 1.60489 \ 3.21667 \ 0.64430 \ 4.84609) .$$



Obr.3. 2D polygónova sieť.

Záver

Tento typ polygónových sietí svojim väzbovým pripojením deformuje vnútornú, presne zameranú štruktúru siete. Vyplýva to z toho, že poloha bodov B je ovplyvnená rôznymi napätiami a deformáciami pri ich určení v príslušnej nadradenej sieti (najmä keď sa jedná o štátnu sieť). Teda aj súradnicami c^0 prezentovaná tzv. približná konfigurácia siete nebude polohovo kongruentná s jej voľnou figuráciou, ktorá prezentuje štruktúru siete na základe vykonaných meraní a odstránení vnútorných rozporov a väzieb, spravidla s novými technikami na vysokej úrovni presnosti. Z toho vyplýva, že pri vyrovnaní siete pôvodné deformácie dátumových bodov B, ktorých poloha sa vyrovnaním nebude meniť, ovplyvnia polohu bodov P, teda vznikne deformovaná, pripojená a vyrovnaná konfigurácia celej polygónovej siete, pri ktorej môže byť aj značne znehodnotený vykonaný presný meranie v sieti.

Keď teda uvážime, že vyrovnané súradnice \hat{c}_p a ich presnosť $Q_{\hat{c}_p}$ je závislá na polohe a stochastických vlastnostiach bodov B (voľbe dátumu), je zrejmé, že napr. pri deformačných meraniach sa snažíme vyhýbať použitiu tohoto typu polygónových sietí.

Literatúra

- Gotthardt, E.: Einführung in die Ausgleichsrechnung. *Wichmann, Karlsruhe 1978.*
- Pelzer, H.(Hrsg.): Geodätische Netze in Landes und Ingenieurvermessung I., II. *Wittwer, Stuttgart 1980, 1985.*
- Wolf, H.: Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. *Dümmler, Bonn, 1968.*
- Weiss, G.: Spracovanie voľných polygonometrických štruktúr. *Habilitačná práca, F BERG, Košice 1991.*
- Weiss, G., Sütti, J.: Lokálne polohové siete I. *Vyd. Štroffek, Košice 1997.*