

Genauigkeit von terrestrisch gemessenen und transformierten geodätischen Netzen

Juraj Sütti¹

Presnosť terestrických meraní a transformovaných geodetických sietí

Pre zamerané, voľne vyrovnané a transformované lokálne polohové siete (MATL-siete) sa nepoužívajú žiadne alebo sa používajú nevhodné variančné charakteristiky presnosti. Z nich sú analyzované a hodnotené kovariančné matice (2), (6) a (7), ktoré nevyjadrujú reálnu presnosť siete. Na exaktnom základe je odvodená štruktúra novej kovariančnej matice (15) MATL-sietí, ktorá objektívne popisuje ich presnosť.

Key words: adjusting local plane networks, adjusted net transformations, accuracy of net processings, covariance matrices of the transformed networks.

Einleitung und Problemstellung

In geodätischer Praxis kommen oft Aufgaben vor, die Schaffung lokaler Lagenetze erfordern, um verschiedene, anspruchsvolle geodätische Arbeiten (Absteckungsarbeiten, Kontrollmessungen usw.) zu ermöglichen. Nach einem solchen Netzaufbau, als Grundlage für erforderliche verschiedene Analysen (zur Realisierung der folgenden geodätischen Aktivitäten) dient die Kovarianzmatrix von ausgeglichenen Netzpunktkoordinaten im Lokalnetz. Solche Matrix kann man aber nur in Abhängigkeit der Aufbaukonzeption des Netzes ableiten und infolge dessen, die Matrizen werden verschiedene Struktur und Inhalt besitzt.

Falls das Lokalnetz auf die Punkte eines übergeordneten Netzes, gewöhnlich des Landesnetzes (amtliches Lagenetz mit Datum D(A)), angeknüpft ist, d.h. eine Lagenetzausgleichung unter Zwang nach der standarden bzw. effizienten Variante durchgeführt ist, die gesuchte Matrix lässt sich wie folgt

$$\Sigma_C = s_o^2 Q_C = s_o^2 (A Q_L^{-1} A^T)^{-1} = \Sigma_{C(N)} \quad (1a)$$

bzw.

$$\Sigma_C = \Sigma_{C(N)} + \Sigma_{C(D)} \quad (1b)$$

ausdrücken. In Beziehungen (1), die Matrix $\Sigma_{C(N)}$ schliesst die Messgenauigkeits- und die Netzkonfigurationseinflüsse ein, die Matrix $\Sigma_{C(D)}$ beschreibt die Wirkung der Datumsgenauigkeit, d.h. der Genauigkeit von Anschlusskoordinaten, deren Bestimmung aufgrund verschiedener Methoden durchgeführt werden kann (Blaha, 1974; Christov, 1969; Kubáček, 1971; Sütti, 1974).

Falls das Lokalnetz auf Grund einer freien Ausgleichung (am meisten nach der Gesamtpurminimierung) in einem geeigneten lokalen Referenzrahmen mit Datum D(L) bearbeitet wird, die Genauigkeitsverhältnisse im ausgeglichenen Netz durch die entsprechende Kovarianzmatrix

$$\Sigma_{C(L)} = s_o^2 Q_{C(L)} \quad (2)$$

beschreibt sind. Für praktische Verwendung eines solchen Netzes muss dieses ins amtliche Lagenetz (auf das Datum D(A)) transformiert werden. Die Genauigkeit der durch Transformation gebildeten neuen Punktkoordinaten C^{At} sollte man durch eine äquivalente, alle Umstände der Entstehung von C^{At} berücksichtigte Kovarianzmatrix $\Sigma_{C(At)}$ beschreiben. Diese Matrix sollte die infolge der Mess- und Bearbeitungsgenauigkeit und der Transformation entstehende Punktunsicherheit des Netzes reflektieren. Für Bildung solcher Kovarianzmatrix $\Sigma_{C(At)}$ kann man verschiedene Konzeptionen

¹ Prof. Ing. Juraj Sütti, DrSc., Katedra geodézie a geofyziky F BERG Technickej univerzity, Park Komenského 19, 04384 Košice (Recenzovali: Doc. Ing. Alojz Kopáček, CSc. a Doc. Ing. Ján Cirbus, CSc. Revidovaná verzia doručená 10.8.1998)

verwenden, die an bestimmten Ausgangsvoraussetzungen basieren. Diese Konzeptionszutritte haben am meisten vereinfachender Charakter, so dass die hergestellten Matrizen $\Sigma_{C(At)}$ verschiedene Bilder über die Genauigkeit von transformierten Netzpunktkoordinaten geben.

Im folgenden werden die häufigst verwendeten Bildungskonzeptionen der Matrix $\Sigma_{C(At)}$ diskutiert und es wird auch ein theoretisch begründeter Weg für Ableitung der Matrix $\Sigma_{C(At)}$ gegeben. Dieser Matrixentwurf geht von der reellen Gesetzmässigkeiten zwischen den in die Transformation eintretenden stochastischen Grössen aus. Die Kovarianzmatrix $\Sigma_{C(At)}$ wird für die ebene lineare konforme Transformation (überbestimmte Ähnlichkeitstransformation) mit 4 Transformationsparameter abgeleitet, die in der Geodäsie häufig benutzt wird.

Transformierte Koordinaten ins amtliche Netz

Betrachten wir ein Lokernetz mit p Neupunkten, mit d Anschlusspunkten aus dem amtlichen Netz, d.h. ein Punktfeld mit $n=p+d$ Punkten, wobei eine bestimmte Anzahl $h \leq d$ von Festpunkten als homologische Punkte für Bestimmung von Transformationsparameter verwendet wird.

Das Transformationsmodell für Koordinaten eines Punktes B_i aus dem Punkthaufens kann man mit Gleichungen

$$\begin{aligned} X_i^{At} &= t_x + m \cos \omega X_i^L - m \sin \omega Y_i^L = t_x + a X_i^L - b Y_i^L \\ Y_i^{At} &= t_y + m \cos \omega Y_i^L + m \sin \omega X_i^L = t_y + a Y_i^L + b X_i^L \end{aligned} \quad (3)$$

angegeben, wo bedeutet:

- $C_i^{At} = [X_i^{At} \ Y_i^{At}]$ Koordinaten im amtlichen Netz, die durch Transformation von aus freier Ausgleichung des Lokernetzes bestimmten Koordinaten C_i^L erhältlich sind,
- $TP = [t_x \ t_y \ a \ b]$ die Transformationsparameter, die aus der entsprechenden Ausgleichung folgen.

Die Transformationsgleichungen für alle Punkte des Punktfeldes bekommt man dann in Matrixschreibweise zu

$$C^{At} = ATP \quad (4)$$

wo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & X_1^L & -Y_1^L \\ 0 & 1 & Y_1^L & X_1^L \\ \vdots & & & \\ 1 & 0 & X_n^L & -Y_n^L \\ 0 & 1 & Y_n^L & X_n^L \end{bmatrix}, \quad TP = [t_x \ t_y \ a \ b] \quad (5)$$

Kovarianzmatrizen für die transformierten Koordinaten

Eine Lösung der Kovarianzmatrix für die transformierten Koordinaten (4) geht von den im allgemeinen angenommenen Voraussetzungen für die Netz-transformation aus, z.B. (Heck, 1985), die auf die folgenden Ausgangspunkten gegründet sind :

- die Koordinaten C^{At} werden als Zufallsvariablen mit Erwartungswert $E(C^{At}) = E(ATP) = A \cdot TP$ und Dispersion $D(C^{At}) = I$ (I ist Identitätsmatrix) angesehen, d.h. die Koordinaten C^{At} stellen als nichtkorrelierte stochastische Grössen mit homogener Genauigkeit eine Realisierung des entsprechenden Zufallsvektors dar,
- die aus freier Ausgleichung erhaltenen Koordinaten C^L werden als nicht - stochastische Grössen mit $E(C^L) \equiv C^L$ und $D(C^L) \equiv 0$ betrachtet, d.h. der Erwartungswert ist mit der Realisation C^L identisch und diese Koordinaten als feste, nicht verbesserungsbedürftige Grössen aufgefasst werden.

Dieses Ausgangsmodell ist vermutlich gerechtfertigt auch dadurch, dass im meisten Fällen eine wesentlich genauere Bestimmung von C^L realisiert ist im Vergleich mit der Genauigkeit von C^A und dass die Genauigkeitsdislokation von C^L am öftestens homogener Charakter hat.

Auf Grund dieser Behauptungen kann man dann in Gleichung (3) nur der Vektor TP als Zufallsvektor auffassen, dessen stochastische Eigenschaften durch seine Kovarianzmatrix Σ_{TP} beschrieben sind. Werden die Sätze und Regeln der Fortpflanzung von Varianzen und Kovarianzen für die Gleichung (4) gebraucht, die Kovarianzmatrix der transformierten Koordinaten lautet

$$\Sigma_{C(At)} = A \Sigma_{TP} A^T. \quad (6)$$

Dieser Zutritt zur Bestimmung der Kovarianzmatrix nach (6) kann man natürlich nicht als exakte Lösung ansehen, vor allem aus folgenden Gründen:

- der Vektor C^L wird nicht als stochastische Variable aufgefasst obgleich C^L ein Zufallsvektor ist mit $E(C^L)=C^L$, $D(C^L)=\Sigma_{C(L)}$,
- die Kovarianzmatrix nach (6) ist abhängig nur von der Netzkonfiguration und von der Genauigkeit der bestimmten TP aber gar nicht von der Bestimmungsgenauigkeit des Punkthaufens. Die "Genauigkeit" der TP hängt dabei ausschliesslich von der Auswahl und Anzahl der verwendeten homologischen Punkten sowie deren Bestimmungs-genauigkeit

Nach (6) definiertes Genauigkeitsmass des transformierten Punktfeldes dann gibt in Wirklichkeit, zusammen mit der Koordinatenklaffungen $dC_H = C^A_H - C^L_H$, nur ein Homogenitäts- bzw. Heterogenitätsmass zwischen dem transformierten und amtlichen Punktfeldes in der entsprechenden Region an.

Eine andere Lösung der Kovarianzmatrix $\Sigma_{C(At)}$ kann man schon für einen realistischeren Zutritt zu ihrer Bestimmung halten. In dieser Lösung, ausser Einflüsse der transformationsweisen Eingliederung des Lokalnetzes ins amtliche Netz, auch durch die Matrix (2) induzierten Genauigkeitseinflüsse der Netzbestimmung berücksichtigt werden. Auf Grund dessen, für die Kovarianzmatrix folgt

$$\Sigma_{C(At)} = \Sigma_{C(L)} + A \Sigma_{TP} A^T = \Sigma_{C(At)M} + \Sigma_{C(At)D}, \quad (7)$$

wo der Term $\Sigma_{C(At)M}$ die Genauigkeitseinflüsse des Netzbestimmung (Messung, Bearbeitung) und der Term $\Sigma_{C(At)D}$ die Transformationseinflüsse charakterisiert. Diese Ableitungskonzeption des Matrix (7) beruht auf der Theorie der inneren und äusseren Genauigkeit der geodätischen Netze (Meissl, 1965, 1969; Wolf, 1981) und die Matrix nach (7) folglich beschreibt die äussere Genauigkeit des transformierten Punktfeldes im amtlichen Netz. Es ist weiter bekannt, dass die aus freier Netzausgleichung entstehende Matrix (2) verändert sich nicht nach einer linearen konformen Transformation (Kahler, 1987) und durch diese Matrix kann man die innere Netzgenauigkeit auch im Datum D(A) beschreiben.

Diese Konzeption für Bildung der Kovarianzmatrix nach (7) beruht vor allem am logischen Aufbau und Wirkung der Fehlerquellen an die gesammte Genauigkeit des transformierten Punkthaufens, wobei die bekannten Kenntnisse aus der Theorie der inneren und äusseren Genauigkeit von geodätischen Netzen berücksichtigt sind.

Neues Genauigkeitsmass für transformierte Netzpunktkoordinaten

Im folgenden wird für Bestimmung der Matrix $\Sigma_{C(At)}$ eine auf exaktem Modell ruhende Lösung verwendet, die alle wirkende Fehlerquellen nach entsprechenden mathematischen Gesetzen in Betracht gezogen wird.

Man geht von Gleichungen (3) als Funktionen ausgeglichener Grössen (lokale Koordinaten, Transformationsparameter) aus, in den alle Argumente, d.h. die Vektoren

$$TP = [t_x \ t_y \ a \ b]^T, \quad (8)$$

$$C^L = [X_1^L \ Y_1^L, X_2^L \ Y_2^L \ \dots \ X_n^L \ Y_n^L]^T, \quad (9)$$

in Übereinstimmung mit der Realität als Zufallsvariable mit

$$\begin{aligned} E(TP) &= TP, \quad D(TP) = \Sigma_{TP}, \\ E(C^L) &= C^L, \quad D(C^L) = \Sigma_{C(L)} \end{aligned} \quad (10)$$

angefasst werden kann. Wir können dann voraussetzen, dass alle Argumente in (3) mit wahren Fehlern ε belastet werden. Verwendet man für die Gleichungen (3) das Fehlerfortpflanzungsgesetz, für die wahren Fehler der transformierten Koordinaten des Punktfeldes dann erhält man

$$\begin{aligned} \varepsilon_{XA_{t,1}} &= \varepsilon_{tx} + X_1^L \varepsilon_a - Y_1^L \varepsilon_b + a\varepsilon_{XL,1} - b\varepsilon_{YL,1}, \\ \varepsilon_{YA_{t,1}} &= \varepsilon_{ty} + Y_1^L \varepsilon_a + X_1^L \varepsilon_b + b\varepsilon_{XL,1} + a\varepsilon_{YL,1}, \\ &\vdots \\ \varepsilon_{XA_{t,i}} &= \varepsilon_{tx} + X_i^L \varepsilon_a - Y_i^L \varepsilon_b + a\varepsilon_{XL,i} - b\varepsilon_{YL,i}, \\ \varepsilon_{YA_{t,i}} &= \varepsilon_{ty} + Y_i^L \varepsilon_a + X_i^L \varepsilon_b + b\varepsilon_{XL,i} + a\varepsilon_{YL,i}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (11)$$

Die Größen an der rechten Seiten von Gleichungen (11) kann man durch Matrizen

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & X_1^L & -Y_1^L & a & -b & \dots & 0 & 0 \dots \\ 0 & 1 & Y_1^L & X_1^L & b & a & \dots & 0 & 0 \dots \\ \vdots & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & X_i^L & -Y_i^L & \dots & \dots & \dots & a & -b \dots \\ 0 & 1 & Y_i^L & X_i^L & \dots & \dots & \dots & b & a \dots \\ \vdots & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_{tx} \ \varepsilon_{ty} \ \varepsilon_a \ \varepsilon_b \ \vdots \ \varepsilon_{XL,1} \ \varepsilon_{YL,1} \ \varepsilon_{XL,i} \ \varepsilon_{YL,i} \ \dots]^T \quad (12)$$

ausdrücken und dann die Beziehungen (11) in der Gestalt

$$\varepsilon_{C(At)} = H \varepsilon. \quad (13)$$

einführen. In dieser Beziehung (13) geht man auf bekannte Weise von wahren Fehlern zu den Standardabweichungen, bzw. Kovarianzmatrizen über, wobei den Vektoren $\varepsilon_{C(At)}$ und ε die Matrizen $\Sigma_{C(At)}$ und $\Sigma_{(TP,C(L))}$ entsprechen, aus deren die letzte Kovarianzmatrix die Struktur

$$\Sigma_{(TP,C(L))} = \begin{bmatrix} \Sigma_{TP} & 0 \\ 0 & \Sigma_{C(L)} \end{bmatrix} \quad (14)$$

besitzt. Falls jetzt die Regel der Kovarianzfortpflanzung für die Beziehung (13) auch mit Berücksichtigung der Matrix (14) verwendet wird, die Kovarianzmatrix der transformierten Punktkoordinaten des Lokalnetzes ergibt sich zu

$$\Sigma_{C(At)} = H \Sigma_{(TP,C(L))} H^T. \quad (15)$$

Die Formel (15) kann man auch durch eine Summe von zwei Teilmatrizen ausdrücken, die Einflüsse aus einzelnen Fehlerquellen beschreiben. Die Matrix H ist zerlegbar auf zwei Blocks nach

$$H = [A \ B], \quad (16)$$

wo die Matrix A Koeffizienten und Zufallsgrößen C^L und die Matrix B die Transformationsparameter a, b enthält. Die Matrix $\Sigma_{C(At)}$ (15) kann man dann in der Gestalt schreiben

$$\Sigma_{C(At)} = [A \ B] \begin{bmatrix} \Sigma_{TP} & 0 \\ 0 & \Sigma_{C(L)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T \\ B^T \end{bmatrix} = A \Sigma_{TP} A^T + B \Sigma_{C(L)} B^T = \Sigma_{C(At)D} + \Sigma_{C(At)M}, \quad (17)$$

wo die einzelnen Terme dieselbe Bedeutung haben wie in Beziehung (7).

Beispiel

Um einen numerischen Vergleich von Genauigkeitsmassen eines ausgeglichenen und transformierten Lokalnetzes nach allen 3 Definitionen der Kovarianzmatrix (6), (7), (15) zu erhalten, betrachten wir ein kleines lokales Lagenetz (Bild 1). Für dieses Netz werden die Lage-standardabweichungen nach

$$S_L = \sqrt{S_X^2 + S_Y^2} \quad (18)$$

berechnet, wo s_x und s_y die Koordinatenstandardabweichungen bezeichnen. Das Netz wird durch 3 homologische Punkte 1,2,3 aus dem amtlichen Lagenetz (in der Slowakei mit Datum S-JTSK) mit bekannten Koordinaten und durch 5 neue zu bestimmende Punkte 4,5,6,7,8 gebildet. Aufgrund der realisierten Winkel- und Längenmessungen, das Netz wurde einer freien Ausgleichung im gewählten lokalen System (mit Benutzung aller Punkte zur Bestimmung des inneren Netzdatums) untergezogen und die ausgeglichenen Koordinaten C^L (Tab.1) zusammen mit ihrer Kovarianzmatrix $\Sigma_{C(L)}$ bestimmt. Diese Koordinaten wurden weiter mit Hilfe aus einer Ähnlichkeitstransformation berechneten Transformationsparameter TP auf die Koordinaten C^{Jt} übergeführt und die Klaffungen dC_H ausgerechnet (Tab.2). Nach Berechnung der Kovarianzmatrizen (6), (7), (15), wurden die Werte s_L nach (18) bestimmt, die für einzelne Netzpunkte in Tab.3 angeführt sind.

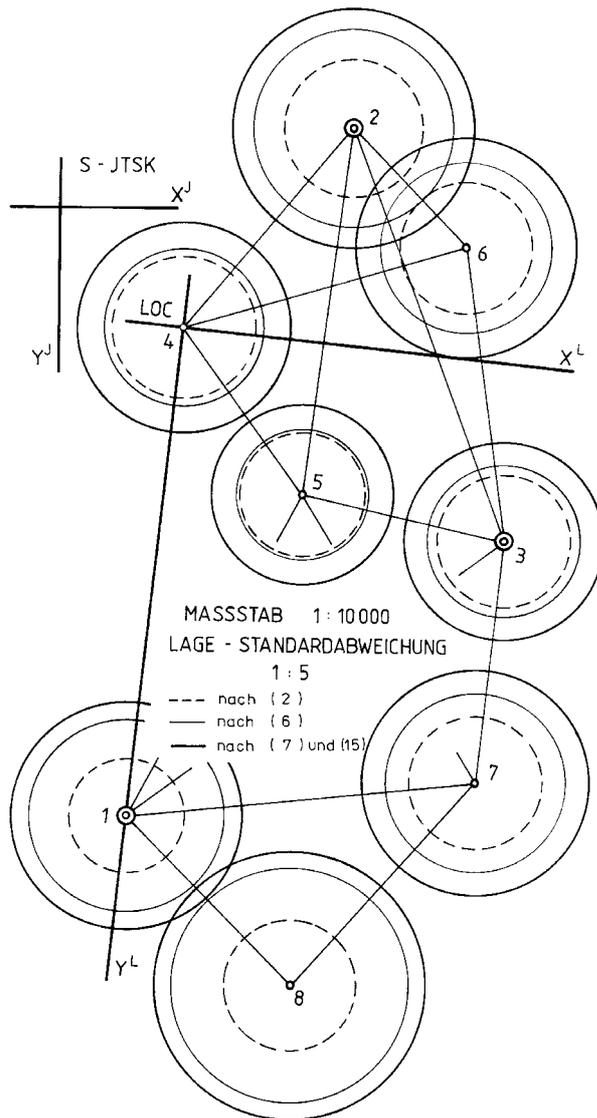


Abb.1. Die nach Formeln (2), (6), (7) und (15) bestimmte Punktlagegenauigkeit im transformierten Punktfeld.

Tab.1. Koordinaten von homologischen Punkten und die lokalen, ausgeglichenen sowie die transformierten Netzpunktkoordinaten.

Punkt	Koordinaten					
	C^J		C^{Jt}		C^L	
1	1239001.117	264506.302	1239001.119	264506.300	2000.011	3210.404
2	1239502.494	262798.614	1239502.443	262798.612	2359.007	1467.227
3	1239894.221	263803.978	1239894.221	263803.982	2832.221	2436.903
4			1239100.828	263300.016	2000.018	2000.009
5			1239400.516	263697.862	2331.457	2371.822
6			1239775.956	263080.330	2654.747	1725.466
7			1239842.535	264393.240	2829.255	3028.411
8			1239413.391	264904.545	2443.685	3573.329

Tab.2. Transformationsparameter, ihre Standardabweichungen und die Koordinatenklaffungen an den homologischen Punkten.

Transformationsparameter		Punkt	Koordinatenklaffungen [mm]	
Werte	Standardabweichung		dX_H	dY_H
1237272.369	9.696[mm]	1	1.539	-0.002
261142.044	9.696[mm]	2	-1.472	-0.002
0.996607778	2.799768 e-6	3	-0.067	0.004
0.082378306	2.799768 e-6			

Tab.3. Lage - standardabweichungen der Netzpunkte, die aus nach Berechnungsformeln (2), (6), (7), (15) definierten Kovarianzmatrizen des transformierten Punktfeldes ermittelt wurden.

Punkt	Lage - standardabweichungen [mm]			
	Formel (2)	Formel(6)	Formel(7)	Formel(15)
1	2.775	4.827	5.568	5.567
2	3.308	4.757	5.795	5.795
3	3.093	3.582	4.732	4.732
4	3.417	3.799	5.109	5.109
5	3.047	3.141	4.375	4.375
6	3.182	4.169	5.244	5.245
7	3.245	4.414	5.479	5.478
8	3.105	5.698	6.490	6.490

Schlussfolgerungen

Das lokale, gemessene, ausgeglichene und dann ins amtliche Punktfeld transformierte Lagenetz (sog. MATL-Netz) muss man für künftige Verwendungen auch durch die Punktgenauigkeit charakterisieren. Diese Genauigkeit wird im allgemeinen mit der die Varianzen und Kovarianzen der transformierten Netzkoordinaten umfassenden Kovarianzmatrix $\Sigma_{C(A_t)}$ im Sinne der Formeln (2), (6) und (7) beschreibt. Die Genauigkeitserklärung nach diesen Beziehungen hängen aber von vereinfachenden Annahmen über die stochastischen Eigenschaften der Grössen - Argumente in den Transformationsgleichungen (3) ab. Natürlich, diese Kovarianzmatrizen können dann über die Genauigkeit von transformierten Punktkoordinaten kein reales Bild bieten. Kovarianzmatrix $\Sigma_{C(A_t)}$ mit richtiger Struktur muss man deshalb aufgrund nur exakter Eigenschaften der mitzuwirkenden Grössen und Beziehungen zwischen ihnen ableiten, was in diesem Beitrag getan ist. Die abgeleitete Kovarianzmatrix (15) beschreibt objektivhaftig die Genauigkeit von Netzpunkten, wobei alle mögliche Fehlerquelle berücksichtigt wurden. Wie ist es ersichtlich aus dem Beispiel, die nach (7) und (15) bestimmten Genauigkeitsmasse für das verwendete Netz weisen praktisch identische Werte auf. Das gilt aber im allgemeinen nicht, weil die durch Transformation induzierten Matrixterme in (7) und (15) unterscheiden sich um die Matrix B.

Literatur

- Blaha, G.: Influence de l'incertitude des parametres tenus fixes dans une compensation sur la propagation des variances - covariances. *Bulletin géodésique*, 1974, No.113, 307-315.
- Heck, B.: Ein- und zweidimensionale Ausreissertests bei der ebenen Helmert-Transformation. *Zeitsch. f. Verm. Wesen* 110, 1985, 10, 461-471.
- Christov, K.: Stogoje uravnivanije s učetom ošibok ischodnych dannych. *Geodezija i aerofotosjomka*, 16, 1969, 1, 51-61.
- Kahler, D.: Ein Beitrag zur Theorie der inneren Genauigkeit von transformierten Punktkoordinaten. *Zeitsch. f. Verm. Wesen* 112, 1987, 4, 153-157.
- Kubáček, L.: Efficient estimates of points in a net constructed in stages. *Studia geophysica et geodaetica* 15, 1971, 246-253.
- Meissl, P.: Über die innere Genauigkeit dreidimensionaler Punkthaufen. *Zeitsch. f. Verm. Wesen* 90, 1965, 2, 109-118.
- Meissl, P.: Beiträge zur Theorie der geodätischen Netze im Raum. *Veröff. d. Deutschen Geodät. Komm., Reihe A, Nr. 61, München 1969.*
- Sütti, J.: Vplyv východiskových údajov na výsledky pri vyrovnání sprostredkujúcich pozorovaní. *Zborník vedeckých prác VŠT Košice*, 1974, Zv.1, 87-96.
- Wolf, H.: Innere Genauigkeit und Gausscher Algorithmus. *Zeitsch. f. Verm. Wesen* 106, 1981, 3, 233-240.