Vyrovnanie výškovej - nivelačnej siete

Milan Šadera[1] a Juraj Gašinec [1]

Adjustment of the levelling network

The levelling network is being adjusted by the least square method with the conditional measurements. In the levelling network there are measured the quantities – elevations that are intermixed by various mathematical or geometric equations.

***Key words**: the vector of corrections, the configuration matrix, the cofactor matrix, the levelling network.*

Úvod

Na vyrovnanie výškovej siete zameranej na báze veľmi presnej nivelácie (VPN) (Inštrukcia na práce vo výškových bodových poliach, 1982) sa využíva metóda najmenších štvorcov (MNŠ) a to na vyrovnanie sprostredkujúcich alebo podmienkových meraní. Pre rozhodnutie o spôsobe vyrovnania je podstatný menší počet numerických operácií. Vzhľadom na to vyrovnávame nivelačné siete spravidla podľa podmienkových meraní a trigonometrické výškové siete podľa sprostredkujúcich meraní. Uvedené siete, ak sú vložené do už vyrovnaných sietí, nesmú vyrovnaním meniť dané výšky pripájacích bodov (Abelovič, 1990).

Vyrovnanie nivelačnej siete podľa podmienkových meraní

Uvedený spôsob je najrozšírenejším modelom vyrovnania na princípe MNŠ. Pri zameraní nivelačnej siete sa merajú veličiny – prevýšenia, ktoré sú spolu viazané rôznymi matematickými, resp. geometrickými vzťahmi – podmienkami (napr. súčet prevýšení v uzatvorenom nivelačnom polygóne musí byť nulový). Ak meraním získame prevýšenia v nadbytočnom počte, ktoré nebudú stanovené podmienky pod vplyvom meračských chýb spĺňať, musíme pristúpiť k vyrovnaniu podľa týchto podmienok. Aby sme nájdené rozpory odstránili, pripájame k nim opravy. Predpokladom pre použitie vyrovnania je vykonanie aspoň jedného nadbytočného merania. Ak by sme pri nadbytočnom počte meraní vyrovnanie nevykonali, dostali by sme v geodetickej sieti rôznou výpočtovou cestou odlišné číselné hodnoty pre prevýšenie, resp. výšku toho istého bodu, čo je neprípustné z hľadiska nadväzujúcich geodetických prác.

Formulácia úlohy

Nech je meraných n veličín – prevýšenia h_1, ..., h_n , s presnostnými charakteristikami – váhovými koeficientmi p_{h1}, ... , p_{hn}, resp. s ich recipročnými hodnotami – kofaktorovými koeficientmi $q_{hi}=1/p_{h1}$, ... , $q_{hn}=1/p_{hn}$. Prestnostné charakteristiky môžu byť vytvárané na princípe váhy 1 kilometrového úseku nivelačného ťahu, alebo voľbou vhodných celých reálnych čísiel (konštánt), na základe vzťahov

$$q_{hi} = \frac{s_L^2 \cdot s_i}{s_L^2} = 1 \cdot s_i \,, \tag{3-1}$$

resp.

$$p_{hi} = \frac{1}{s_i} \,, \tag{3-2}$$

kde: s_L je štandardná odchýlka nivelačného ťahu [mm],
s_i je dĺžka nivelačného ťahu [km].

Jednotlivé koeficienty q_{hi} , resp. p_{hi} zostavíme do matíc, a to buď kofaktorovej $\mathbf{Q}_h$ resp. váhovej $\boldsymbol{P}_h$. Ak usporiadame merané veličiny h_i do vektora meraných veličín $\boldsymbol{h}$

[1] *Ing. Milan Šadera* a *Ing. Juraj Gašinec,* Katedra geodézie a geofyziky, F BERG Technickej univerzity v Košiciach, Park Komenského 19, 043 84 Košice
(Recenzovali: *Prof. Ing. Juraj Sütti, DrSc.* a *Ing. Jozef Kožár*)

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}, \qquad (3\text{-}3)$$

potom jednotlivé matice, kofaktorová $\boldsymbol{Q}_h$, resp. váhová $\boldsymbol{P}_h$

$$\mathbf{Q}_h = \begin{bmatrix} q_{h1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{h2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{hn} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{P}_h = \begin{bmatrix} p_{h1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{h2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{hn} \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}4)$$

sú (n x n) rozmerné diagonálne, štvorcové, pozitívne definitné matice kofaktorov resp. váh meraných veličín.

Skutočné hodnoty $\tilde{\boldsymbol{h}}$ meraných veličín spĺňajú presne r vzťahov, nadbytočných (redundantných) meraní $r = n - k$, kde k je počet hľadaných vyrovnaných výšok bodov, ktoré sú jednoznačne určené pomocou n prevýšení. Počet podmienkových rovníc sa musí rovnať redundancii. Je nutné uvážiť, či vyrovnanie splní aj nezmyselné podmienky a naopak, či neformulované podmienky nebudú splnené, preto sa nevytvára veľký počet podmienkových (modelových) rovníc

$$\varphi\left(\tilde{\boldsymbol{h}}^T\right) = \boldsymbol{0} \,. \qquad (3\text{-}5)$$

Splnenie vzťahu (3-5) budeme vyžadovať i pre vyrovnané veličiny $\hat{\mathbf{h}}$, teda musí platiť

$$\varphi\left(\hat{\boldsymbol{h}}^T\right) = \boldsymbol{0} \,. \qquad (3\text{-}6)$$

Namerané veličiny $\boldsymbol{h}$ tieto vzťahy (3-5) a (3-6) v skutočnosti pod vplyvom meračským chýb nespĺňajú, platí teda

$$\varphi\left(\boldsymbol{h}^T\right) = \boldsymbol{U} \neq \boldsymbol{0} \,. \qquad (3\text{-}7)$$

Vypočítané odchýlky $\boldsymbol{U}$ vo vzťahu (3-7) nazveme uzávery. Úlohou vyrovnania je teda eliminácia týchto uzáverov, pripojením opráv $\boldsymbol{v}$ k nameraným hodnotám $\boldsymbol{h}$. Takýchto riešení by bolo nekonečne mnoho, pretože počet hľadaných opráv (t.j. počet vykonaných meraní n) je väčší ako počet nadbytočných meraní r. Aby riešenie bolo jednoznačné, pridáme podmienku MNŠ

$$\boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{Q}_h^{-1} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{min.} \quad , \qquad (3\text{-}8)$$

pomocou ktorej sa extremalizuje sústava podmienok.

Riešenie úlohy

Pôvodné podmienkové rovnice (3-6) môžu byť lineárne i nelineárne. Pre ďalšie výpočty musia byť vždy linearizované, čo vyplýva z princípu MNŠ. Po dosadení za

$$\hat{\boldsymbol{h}} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{v} \qquad (4\text{-}1)$$

vykonáme ich rozvoj do Taylorovho radu, s uvažovaním iba členov 1.rádu, vzhľadom na požadovanú presnosť výsledku. Potom

$$\varphi\left(\hat{\mathbf{h}}^T\right) = \varphi\left(\mathbf{h}^T + \mathbf{v}^T\right) = \varphi\left(\mathbf{h}^T\right) + \left[\frac{\partial \varphi\left(\hat{\mathbf{h}}^T\right)}{\partial \hat{\mathbf{h}}^T}\right]_{\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{h}} \cdot \mathbf{v} \cdot \qquad (4\text{-}2)$$

Ak ďalej zavedieme označenie podľa (3-7):

$$\varphi\left(\boldsymbol{h}^{T}\right)=\boldsymbol{U}\,,$$

spolu s označením konfiguračnej matice nivelačnej siete

$$\left[\frac{\partial\varphi\left(\hat{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}}\right)}{\partial\hat{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}}}\right]_{\hat{\mathbf{h}}=\mathbf{h}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial\varphi_1\left(\hat{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}}\right)}{\partial\hat{\mathrm{h}}_1}, & \frac{\partial\varphi_1\left(\hat{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}}\right)}{\partial\hat{\mathrm{h}}_2}, & \dots & ,\frac{\partial\varphi_1\left(\hat{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}}\right)}{\partial\hat{\mathrm{h}}_n}\\ ----- & ----- & ---- & -----\\ \frac{\partial\varphi_r\left(\hat{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}}\right)}{\partial\hat{\mathrm{h}}_1}, & \frac{\partial\varphi_r\left(\hat{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}}\right)}{\partial\hat{\mathrm{h}}_2}, & \dots & ,\frac{\partial\varphi_r\left(\hat{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}}\right)}{\partial\hat{\mathrm{h}}_n}\end{bmatrix}_{\hat{\mathbf{h}}=\mathbf{h}}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \qquad (4\text{-}3)$$

môžeme napísať sústavu linearizovaných podmienkových rovníc:

$$\boldsymbol{U}+\boldsymbol{A}^{T}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}. \qquad (4\text{-}4)$$

Úlohou vyrovnania je teda určiť opravy v_i k jednotlivým meraným prevýšeniam h_i tak, aby bola splnená podmienka MNŠ (3-8) a súčasne aj reštrikcie (obmedzenia) (4-4).

Sčítaním nameraných prevýšení h_i v podmienkových rovniciach (3-7) dostaneme prvky vektora odchýlok $\mathbf{U}$. Pre rovnice (4-4) zostavíme konfiguračnú maticu nivelačnej siete $\mathbf{A}$, na princípe vzťahu (4-3).

Postup vyrovnania

Cieľom odhadovacej procedúry je v danom prípade určiť opravy v k nameraným prevýšeniam a vyrovnané hodnoty prevýšení podľa (4-1).

Určenie takých opráv v, ktoré by spĺňali vzťah (3-8) a zároveň (3-7), rieši sa známym spôsobom vyšetrenia extrému cieľovej (účelovej) funkcie (3-8), s vedľajšími podmienkami - reštrikciami, ktoré predstavujú rovnice (4-4). Východiskový zápis tejto procedúry má tvar
odkiaľ pre opravy vyplýva

ktorý využíva Lagrangeove koeficienty – koreláty [ku (3-8) sa pripíšu rovnice (4-4) násobené neurčitými koeficientami k].

Extrém (minimum) funkcie (5-1) sa určí pomocou prvej, resp druhej derivácie Ω.

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{Q}_h\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{k}\,. \qquad (5\text{-}3)$$

Ak dosadíme vzťah (5-3) do (4-4), dostaneme sústavu normálnych rovníc

$$\boldsymbol{U}+\boldsymbol{A}^{T}\cdot\boldsymbol{Q}_h\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}\,. \qquad (5\text{-}4)$$

V rovnici (5-4) môžeme označiť $\boldsymbol{A}^{T}\cdot\boldsymbol{Q}_h\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{N}$, maticu koeficientov normálnych rovníc, takže bude platiť

$$\boldsymbol{U}+\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}\,, \qquad (5\text{-}5)$$

a znej určiť koeficienty k

$$\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{N}^{-1}\cdot\boldsymbol{U}\,. \qquad (5\text{-}6)$$

Dosadením vypočítaných Lagrangeových koeficientov - korelát do vzťahu (5-3) dostávame hľadaný vektor opráv

$$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{Q}_h \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{N}^{-1} \cdot \boldsymbol{U}, \tag{5-7}$$

ktorý tvorí cieľ vyrovnania. Pomocou jeho hodnôt vypočítame odhady vyrovnaných veličín podľa (4-1), ktoré musia spĺňať vopred stanovené podmienky.

Záverečné kontroly a štandardné odchýlky

Záverečnú kontrolu vykonáme dosadením vyrovnaných prevýšení do vzťahu (3-6), resp. ak vypočítame rovnice (4-4), ktoré tvoria záverečnú kontrolu[1] spolu so vzťahom

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{I}} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{II}}, \tag{6-1}$$

kde

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_I = -\boldsymbol{U}^T \cdot \boldsymbol{k} \quad \text{a} \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{II} = \boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{Q}_h^{-1} \cdot \boldsymbol{v}. \tag{6-2}$$

Treba však pripomenúť, že splnenie tejto kontroly nepreveruje chybné zostavenie podmienok. Nesúhlas (rozpor) vo vzťahu (3-6) môže byť tiež zapríčinený zanedbaním členov vyššieho radu v Taylorovom rozvoji.

Pre testovanie vyrovnaných hodnôt prevýšení je potrebné vypočítať aposteriórny variančný faktor (jednotkovú varianciu, disperziu, rozptyl)

$$s_0^2 = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q}_{\mathrm{h}}^{-1} \cdot \mathbf{v}}{\mathrm{r}} \tag{6-3}$$

a štandardné odchýlky $s_{\hat{h}_i}$ vyrovnaných prevýšení, ktoré získame ako odmocniny z diagonálnych prvkov kovariančnej matice vyrovnaných prevýšení

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{h}} = s_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{\hat{h}}, \tag{6-4}$$

kde kofaktorová matica vyrovnaných prevýšení $\boldsymbol{Q}_{\hat{h}}$ (Böhm et al. 1990, Šütti 1987) je

$$\mathbf{Q}_{\hat{h}} = \mathbf{Q}_{\mathrm{h}} - \mathbf{Q}_{\mathrm{h}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q}_{\mathrm{h}}. \tag{6-5}$$

Štandardné odchýlky $s_{\hat{h}_i}$ vyrovnaných prevýšení sa musia nachádzať v intervale spoľahlivosti $\langle -\mathrm{H}, +\mathrm{H} \rangle$ na základe predpokladu platnosti normálneho rozdelenia pre chyby (ich opravy), na hladine významnosti $\alpha = 0{,}001$, ktorý je určený pomocou trojnásobku hodnoty σ_0, (Böhm et al., 1990), t.j. základnej kilometrovej štandardnej odchýlky, s ktorou je možné určiť prevýšenie na dĺžke 1km nivelačnej trate

$$\pm H = \pm 3 \cdot \sigma_0. \tag{6-6}$$

Táto aposteriórna (empirická) hodnota sa vyjadrí vzťahom

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n_R}\sum\frac{\rho^2}{R}}, \qquad [\mathrm{mm}], \tag{6-7}$$

v ktorom : R - dĺžky nivelačných oddielov [km],
ρ - odchýlky v prevýšeniach medzi niveláciou tam a späť pre oddiely [mm],
n_R - počet oddielov.

[1] Pri dobre vytvorenom programe (softvere), sa kontroly nemusia robiť vôbec.

V rámci aposteriórnej analýzy vyrovnanej nivelačnej siete je tiež potrebné overiť, či namerané údaje (prevýšenia) nie sú v rozpore s údajmi, ktoré sa dali očakávať pri použitej metodike merania. Pre analýzu je vhodné použiť základnú štandardnú odchýlku σ_0, ktorej numerickú hodnotu získame zo vzťahu (6-7), resp. pre použitý typ nivelačného prístroja a realizovanú technológiu merania je známa.

Prakticky teda, ide o overenie, či bola v rámci merania neprekročená hodnota σ_0 (Dobeš, 1990, Hauf, 1989). Toto overenie, za predpokladu, že chyby prevýšení majú rovnaké normálne rozdelenie, sa vykoná pomocou aposteriórneho variančného faktora s_0^2, vzťah (6-3), pomocou ktorého vytvoríme interval spoľahlivosti

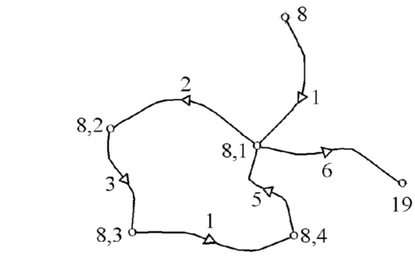
$$\left[\frac{s_0^2(r)}{\chi^2_{r,(1-\alpha/2)}}, \frac{s_0^2(r)}{\chi^2_{r,\alpha/2}}\right] \tag{6-8}$$

a preveríme, či sa σ_0^2 nachádza v tomto intervale. Vo vyjadrení intervalu (6-8) je χ_r^2 náhodná premenná, ktorá podlieha chí- kvadrátu rozdelenia pravdepodobnosti s r stupňami voľnosti, pri hladine významnosti α, pre asymetrický interval spoľahlivosti tak, že $\alpha/2$ - kvantil a (1-$\alpha/2$) – kvantil určujú jeho hranice. Túto pravdepodobnosť volíme dostatočne malú (α=0,01, α=0,05, …[2]). Ak tento náhodný interval pokryje (s pravdepodobnosťou 1-α) nenáhodnú veličinu σ_0^2, môžeme prijať hypotézu, že uskutočnené merania boli vykonané na úrovni zodpovedajúcej použitej metodike. Ak sa σ_0^2 nachádza vľavo od tohoto intervalu, signalizuje to, že vykonané meranie sa realizovalo na nižšej presnostnej úrovni, nastalo vážne porušenie technológie merania, lebo sa nedosiahla tá presnosť, ktorú je možné s použitou metodikou, charakterizovanou hodnotou σ_0, dosiahnuť.

Príklad

Nivelačná sieť (obr. 1) je pripojená na dva dané výškové body 8, 193, s dátumami V_8 = 214,2998 m a V_{193} = 213,9948 m v baltskom výškovom systéme po vyrovnaní (Bpv). Zmysel pohybu „tam“ v nivelačnej sieti je naznačený šípkami. Sieť pozostáva z k = 4 bodov 8.1, 8.2, 8.3, 8.4, ktoré sú jednoznačne určené n = 6 meranými nivelačnými prevýšeniami na báze VPN, redukovanými o opravu z dĺžky latového metra a z tiaže. Výsledky sú zostavené do stĺpcového vektora

$$\underset{6,1}{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} -1{,}551500 \\ -0{,}382290 \\ 0{,}307000 \\ 0{,}072260 \\ 0{,}003010 \\ 1{,}244079 \end{bmatrix} \{\mathrm{m}\}^{3}$$



Obr.1. Nivelačná sieť.

K hodnotám prevýšení prislúchajú kofaktory, usporiadané do kofaktorovej matice

$$\underset{6,6}{\mathbf{Q}_h} = \begin{bmatrix} 0{,}321 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}045 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}049 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}045 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}036 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}136 \end{bmatrix} \{\mathrm{BR}\}^{.}$$

Na vyrovnanie siete s redundanciou r = n – k = 2, je potrebné vytvoriť dve nezávislé podmienkové rovnice v zmysle smeru pohybu, ktoré zapíšeme v tvare

I. $\hat{h}_1 + \hat{h}_2 + \hat{h}_3 + \hat{h}_4 + \hat{h}_5 + \hat{h}_6 - \Delta V_{8-193} = 0$,   II. $\hat{h}_2 + \hat{h}_3 + \hat{h}_4 + \hat{h}_5 = 0$.

---

[2] Pozor, ak ale použijeme pravidlo 3σ (pozri 6-6), tak aj tu by malo zvolené α zohľadňovať toto pravidlo.

[3] Symboly v { } označujú rozmery, pričom *BR* znamená bez rozmeru.

Dosadením numerických hodnôt meraných prevýšení (a známeho výškového rozdielu v I. rovnici) dostávame uzávery v podobe vektora odchýliek

$$\underset{2,1}{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} -0{,}002441 \\ -0{,}000020 \end{bmatrix} \quad \{\mathrm{m}\}.$$ Po zostavení konfiguračnej matice $$\underset{2,6}{\mathbf{A}^{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \{\mathrm{BR}\},$$

vypočítame maticu koeficientov normálnych rovníc $\mathbf{A}^{T} \cdot \mathbf{Q}_{h} \cdot \mathbf{A} = \underset{2,2}{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 0{,}632 & 0{,}175 \\ 0{,}175 & 0{,}175 \end{bmatrix} \quad \{\mathrm{BR}\},$

ďalej vypočítame koreláty $\underset{2,1}{\mathbf{k}} = -\mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0{,}005298 \\ -0{,}005183 \end{bmatrix} \quad \{\mathrm{m}\},$

opravy $$\underset{6,1}{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}_{h} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0{,}00170053 \\ 0{,}00000514 \\ 0{,}00000560 \\ 0{,}00000514 \\ 0{,}00000411 \\ 0{,}00072047 \end{bmatrix} \quad \{\mathrm{m}\}.$$

Pomocou opráv a meraných prevýšení vypočítame vyrovnané prevýšenia

$$\underset{6,1}{\hat{\mathbf{h}}} = \mathbf{h} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1{,}549799 \\ -0{,}382285 \\ 0{,}307006 \\ 0{,}072265 \\ 0{,}003014 \\ 1{,}244799 \end{bmatrix} \quad \{\mathrm{m}\}.$$

Po dosadení vyrovnaných prevýšení do podmienkových rovníc skontrolujeme splnenie podmienkových rovníc

I. - 1,549799 -0,382285+0,307006+0,072265+0,003014+1,244799+0.305000 = 0 m,
II. - 0,382285+0,307006+0,072265+ 0,003014 = 0 m,

resp. vypočítame pretvorené podmienkové rovnice

$$\mathbf{U} + \mathbf{A}^{T} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Kontrolu môžeme vykonať aj pomocou rovnice

$$\hat{\mathbf{\Sigma}}_{I} = -\mathbf{U}^{T} \cdot \mathbf{k} = 0{,}000013 \ \{\mathrm{m}^2\} \quad \text{a} \quad \hat{\mathbf{\Sigma}}_{II} = \mathbf{v}^{T} \cdot \mathbf{Q}_{h}^{-1} \cdot \mathbf{v} = 0{,}000013 \ \{\mathrm{m}^2\},$$

pre ktoré musí platiť $\hat{\mathbf{\Sigma}}_{I} \equiv \hat{\mathbf{\Sigma}}_{II}$.

Pre testovanie vyrovnaných hodnôt prevýšení vypočítame aposteriórny variančný faktor - rozptyl

$$s_0^2 = \frac{\mathbf{v}^{T} \cdot \mathbf{Q}_{h}^{-1} \cdot \mathbf{v}}{r} = 6{,}4140 \ \{\mathrm{mm}^2\}.$$

Na výpočet štandardných odchýliek vyrovnaných prevýšení potrebujeme poznať príslušné kofaktorové koeficienty z matice (6-5)

$$\mathbf{Q}_{\hat{h}\,6,6} = \begin{bmatrix} 0{,}095527 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}095527 \\ 0 & 0{,}033429 & -0{,}012600 & -0{,}011571 & -0{,}009257 & 0 \\ 0 & -0{,}012600 & 0{,}035280 & -0{,}012600 & -0{,}010080 & 0 \\ 0 & -0{,}011571 & -0{,}012600 & 0{,}033429 & -0{,}009257 & 0 \\ 0 & -0{,}009257 & -0{,}010080 & -0{,}009257 & 0{,}028594 & 0 \\ -0{,}095527 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}095527 \end{bmatrix} \{BR\}.$$

Potom štandardné odchýlky získame výberom príslušných prvkov z diagonály v kovariančnej matici vyrovnaných prevýšení

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{h}\,6,6} = s_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{\hat{h}} = \begin{bmatrix} 0{,}6127 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}6127 \\ 0 & 0{,}2144 & -0{,}0808 & -0{,}0742 & -0{,}0594 & 0 \\ 0 & -0{,}0808 & 0{,}2263 & -0{,}0808 & -0{,}0647 & 0 \\ 0 & -0{,}0742 & -0{,}0808 & 0{,}2144 & -0{,}0594 & 0 \\ 0 & -0{,}0594 & -0{,}0646 & -0{,}0594 & 0{,}1834 & 0 \\ -0{,}6127 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6127 \end{bmatrix} \{mm^2\},$$

ktoré zostavíme do vektora štandardných odchýlok vyrovnaných prevýšení

$$s_{\hat{h}\,6,1} = \begin{bmatrix} 0{,}7829 \\ 0{,}4630 \\ 0{,}4754 \\ 0{,}4626 \\ 0{,}4278 \\ 0{,}7829 \end{bmatrix} \{mm\}$$ s požiadavkou na splnenie $s_{\hat{h}_i} \leq 3 \cdot \sigma_0 = 2{,}5326\,\text{mm}$, ktorej vyhovujú všetky údaje.

Na záver je potrebné overiť dodržanie hodnoty štvorca základnej kilometrovej štandardnej odchýlky $\sigma_0^2 = 0{,}716\ \text{mm}^2$ v rámci intervalu spoľahlivosti, ktorý určíme pre r = 2 a hladinu významnosti $\alpha = 0{,}01$ pre chí-kvadrát (χ^2) rozdelenia :

$$\chi^2_{r,(1-\alpha/2)} = \chi^2_{2;\ 0{,}995} = 10{,}597, \qquad \chi^2_{r,\alpha/2} = \chi^2_{2;\ 0{,}005} = 0{,}010.$$

Hraničné hodnoty podľa vzťahu (6-8) sú $\dfrac{s_0^2(r)}{\chi^2_{r,\alpha/2}} = \dfrac{6{,}414\,\text{mm}^2}{0{,}010} = 641{,}400\,\text{mm}^2$,

$\dfrac{s_0^2(r)}{\chi^2_{r,(1-\alpha/2)}} = \dfrac{6{,}414\,\text{mm}^2}{10{,}597} = 0{,}605\,\text{mm}^2$, teda hodnota $\sigma_0^2 = 0{,}716\ \text{mm}^2$ sa nachádza v intervale

$$\sigma_0^2 \in \left\langle\ 0{,}605;\ 641{,}400\ \right\rangle [\text{mm}].$$

Z toho vyplýva, že uskutočnené merania boli vykonané na úrovni, ktorú metodika VPN umožňuje.

Literatúra

Abelovič, J.: Meranie v geodetických sieťach. *ALFA. Bratislava, 1990.*

Böhm, J., Radouch, V. a Hampacher, M.: Teorie chyb a vyrovnávací počet. *GKP. Praha, 1990*

Dobeš, J. et al.: Presné lokálne geodetické siete. *VÚGK. Bratislava, 1990.*

Hauf, M.: Geodézie (technický průvodce 42). *SNTL. Praha, 1989.*

Inštrukcia na práce vo výškových bodových poliach (*984130 I/82). SÚGK. Bratislava, 1982.*

Metodický návod na budovanie, obnovu a údržbu výškových bodových polí. SÚGK. Bratislava, 1983.

Šütti, J.: Geodézia. ALFA. *Bratislava, 1987.*