

Grafické možnosti určovania zvislicových odchýlok vo vysokohorských oblastiach

Vladimír Sedlák¹

Graphical possibilities in determining the vertical deflections in high-mountain regions

The paper presents a possibility of determining the topographical deflections of the vertical in a high-mountain region by means of using a simple and rapid graphical method. During five minutes it is possible to determine the topographical deflections of the vertical with the accuracy of $\pm(1 \div 2)''$ using the explicit mathematical equations and a simple topographical map. The mathematical correction for very asymmetrical peaks, by-valleys and irregular slopes are given. No astronomical and geodetic observations or digital height models are necessary.

Key words: deflection of the vertical, northern and eastern component of deflection of the vertical, prismatic model, inclination correction.

Úvod

V horských a vysokohorských oblastiach, pri strmých zámerách, majú (zvislicové) ťažnicové odchýlky značný vplyv na presnosť geodetických meraní a môžu spôsobiť systematické chyby takýchto zámer rádože aj niekoľko centimetrov na kilometer. Z tohoto dôvodu môže byť polohová presnosť bodov geodetickej siete v takomto prostredí určená s nižšou presnosťou, ako sa od siete požaduje (napr. pri sledovaní geotektonických pohybov, trigonometrickom určovaní výšok a pod.). S cieľom správne vypočítať 3D súradnice geodetickej siete vo vysokohorskom prostredí je potrebné observované geodetické dáta redukovať na používaný referenčný elipsoid.

Pre redukované (transformované) geodetické prvky na referenčnom elipsoide, pre smery \bar{s}_{ij} pre určenie horizontálnych uhlov, zenitové vzdialenosti (uhly) \bar{z}_{ij} a vzdialenosti \bar{d}_{ij} medzi bodmi P_i a P_j platia známe vzťahy (Vykutíl 1982, Hradilek 1984, Gerstbach 1986, Sedlák 1997)

$$\bar{s}_{ij} = s_{ij} + (\xi_i \sin \alpha_{ij} - \eta_i \cos \alpha_{ij}) \cotg z_{ij}, \quad (1)$$

$$\bar{z}_{ij} = z_{ij} + (\xi_i \sin \alpha_{ij} + \eta_i \cos \alpha_{ij}) \cotg z_{ij} + \rho \quad (2)$$

$$\bar{d}_{ij} \cong d_{ij} \left(\sin \bar{z}_{ij} + \sin z_{ij} \right) \frac{R_o}{2R_o + h_1 + h_2}, \quad (3)$$

kde ξ_i, η_i sú meridiánová (pozdlžna) a transverzálna (prična) zložka zvislicovej odchýlky na stanovisku P_i ,

α_{ij} je geodetický azimut z bodu P_i na bod P_j ,

R_o je stredný polomer Zeme (pre naše zemepisné šírky $R_o = 6\,380\,703,611\text{m}$),

ρ je koeficient refrakcie.

Pre mnohé geodetické siete lokálneho charakteru je dôležitá iba lokálna časť zložiek ξ a η zvislicových odchýlok. Regionálna časť zvislicových odchýlok je v rozsahom malých územiach (napr. v časti vysokohorského prostredia) takmer konštantná a môže byť v prípade potreby zohľadnená vyrovnaním a transformáciou celej siete. Prezentovaná grafická metóda určovania zložiek topografických zvislicových odchýlok z topografie reliéfu vysokohorského prostredia veľmi jednoducho umožňuje stanoviť takéto zložky s použitím topografických máp.

Maximálna hodnota topografickej zvislicovej odchýlky $\Theta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ sa môže očakávať v blízkosti stredu medzi údolím a hrebeňom pohoria a závisí od absolútnej hodnoty relatívneho prevýšenia H hrebeňa nad údolím. Pre horské a vysokohorské územia, ku ktorým patria i Vysoké Tatry, kde H je približne 2 000 až

¹ Doc. Ing. Vladimír Sedlák, PhD., Technická univerzita v Košiciach, F BERG, Katedra geodézie a geofyziky, Park Komenského 19, 043 84 Košice
(Recenzovali: Doc. Ing. Ján Cirbus, CSc. a Prof. Ing. Ladislav Bitterer, CSc.)

2 500 m, môžeme predpokladať, že maximálna hodnota topografickej zvislicovej odchýlky Θ_{max} je približne 20", pričom sklon zámer je v rozsahu 10° až 30° (z geodetickej praxe je známe, že strmšie sklony zámer nie sú v geodetických sieťach realizovateľné). Preto korekcie smerov a vzdialeností vo vzťahoch (1) a (3) budú dosahovať hodnoty 12" a 50 ppm, čo je 10-násobne viac ako presnosť merania.

Prizmatický model pre horské a vysokohorské oblasti

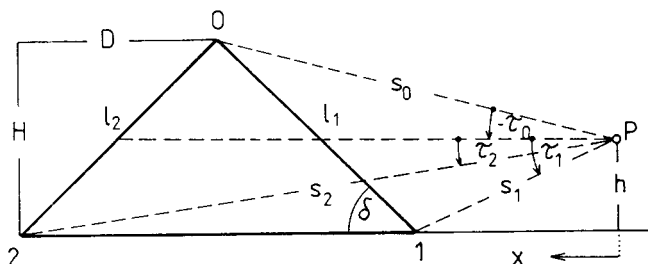
Podstatou grafickej metódy určovania zložiek topografických zvislicových odchýlok sú trilaterálne prizmy, aproximujúce horské pásma (masívy). Horská oblasť však nedovoľuje aplikovať na jej horské masívy presnú prizmatickú formu, ale chyby v určení topografických zvislicových odchýlok sú menšie než 2" v prípadoch, ak sa použijú tzv. voľné prizmy (ľubovoľného tvaru), vhodné na lokálnu topografiu.

Obr.1 znázorňuje geometriu trilaterálnej prizmy aproximujúcej horský masív, kde bod P je bod pozorovania (stanovisko). Topografická zvislicová odchýlka Θ pre bod P je daná explicitným vzťahom (Gerstbach, 1984)

$$\Theta = 0,0075'' \left[h \ln \frac{s_2}{s_1} + \sin \delta \cos \delta \left(l_1 \ln \frac{s_1}{s_0} + l_2 \ln \frac{s_2}{s_0} \right) - \sin^2 \delta \left(l_1 \frac{\tau_1 - \tau_0}{\rho} - l_2 \frac{\tau_2 - \tau_0}{\rho} \right) \right], \quad (4)$$

$$\text{kde } \rho = \frac{180^\circ}{\pi}, \quad l_1 = x_1 + \frac{h}{H} D, \quad l_2 = x_1 + 2D - \frac{h}{H} D, \quad \tau_1 = \arctg \frac{h}{x_1}, \quad s_1 = \sqrt{h^2 + x_1^2},$$

pričom sa uvažuje priemerná hustota 2,67 g.cm⁻³ prizmatického bloku podľa Airyho teórie o blokovej stavbe zemskej kôry (Ochaba, 1986).



Obr.1. Trilaterálna prizma.

Zložky ξ a η sú potom definované vzťahmi

$$\xi = \Theta \cos F, \quad \eta = \Theta \sin F, \quad (5)$$

kde F je azimut (geodetický) generálneho sklonu prizmy.

Vplyv niekoľkých horských pásiem na bod P prostredníctvom topografických zvislicových odchýlok sa dá v takomto jednoduchom tvare priziem predpokladať, ak okolité horské pásma v okolí stanoviska je možno aproximovať súvislou prizmou s konštantnou výškou H , t.j. ak výškový rozdiel jednotlivých horských masívov v línii hrebeňa je do 800 m a ak dno údolia má šírku väčšiu než 40 % zo vzdialenosti D medzi údolím a hrebeňom. V tomto prípade uvažujeme so strednou (priemernou) výškou H_0 prizmy (horského hrebeňa), priemernou vzdialenosťou D_0 medzi údolím a hrebeňom, stredným azimutom F_0 sklonu svahu a horizontálnou vzdialenosťou d bodu P od osi údolia, ktoré pre určenie takejto zvislicovej odchýlky Θ_0 s presnosťou $\pm 2''$ postačí zistiť z topografickej mapy s presnosťou odhadu ± 200 m. Takáto topografická zvislicová odchýlka Θ_0 so svojimi zložkami ξ_0, η_0 je daná vzťahom

$$\Theta_o = \begin{Bmatrix} \xi_o \\ \eta_o \end{Bmatrix} = 0,035'' H_o \left(\frac{d}{D_o} - \frac{d^2}{D_o^2} \right) \begin{Bmatrix} \cos F_o \\ \sin F_o \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Určenie topografických zvislicových odchýlok podľa vzťahu (6) je veľmi praktické, jednoduché a vyžaduje si iba niekoľko minút práce s topografickou mapou (cca 3 až 5 minút na jeden bod). Pre sklonené údolia a značne sa meniace sklony svahov horských masívov je vhodnejšie použiť lokálne, voľné uloženie priziem (voľné prizmy), než ich fixovanie v reťazci.

Pre takéto určenie topografických zvislicových odchýlok podľa vzťahu (6) sú vhodné horské masívy, ktorých uhly sklonov svahov sú v rozpätí do $\pm 40^\circ$ u protiahlych masívov s osou symetrie pozdĺž údolia. V prípade, ak protiahly horské hrebene majú rozdielnu výšku a ich diferencia je väčšia než 800 m, pre určenie zvislicových odchýlok Θ_o sa odporúča použiť vzťah

$$\Theta_o = \begin{Bmatrix} \xi_o \\ \eta_o \end{Bmatrix} \approx 0,035'' H_o \left[\frac{d}{D_o} - \frac{d^2}{D_o^2} + \left(1 - \frac{d}{D_o} \right) \frac{H_o - H_o'}{4H_o} \right] \begin{Bmatrix} \cos F_o \\ \sin F_o \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

kde H_o' je stredná výška protiahleho horského hrebeňa oproti horskému hrebeňu so strednou výškou H_o .

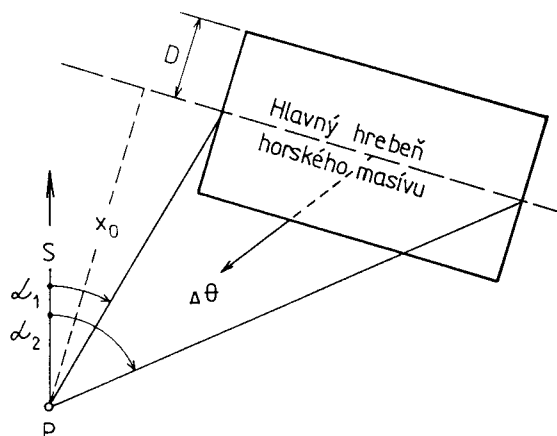
V niektorých prípadoch horské pásma nie sú paralelné, alebo sú separované do krátkych, nepravidelných pásiem. V tomto prípade je možný obdobný, ešte jednoduchší grafický postup pri určovaní tzv. regionálnych zvislicových odchýlok, trvajúci maximálne tri minúty na jeden bod i masív. Výsledné zložky regionálnych zvislicových odchýlok sa určia potom ako súčet $\sum \Delta \xi, \sum \Delta \eta$ ich čiastkových hodnôt $\Delta \xi, \Delta \eta$, prislúchajúcich jednotlivým „voľným“ masívom (prizmám) (obr.2)

$$\Delta \xi \cong \Theta \sin \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \quad (8)$$

$$\Delta \eta \cong \Theta \sin \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2},$$

kde α_1, α_2 sú geodetické azimuty jedného voľného masívu zistené z mapy,

Θ je zvislicová odchýlka zistená z nomogramu (grafickej závislosti $\Theta / H_{[km]} = f(x_o / D)$) (Gerstbach, 1986), pričom x_o, H, D sú parametre zistené taktiež z mapy.



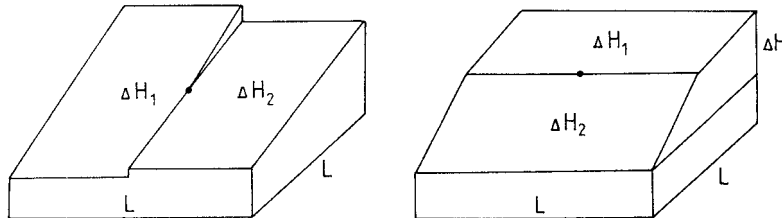
Obr.2. Voľný masív.

Korekcia sklonu pre svahy a štíty

Vplyv uklonených plôch na topografické zvislicové odchýlky môže byť determinovaný integráciou topografického redukčného vzťahu. Je to závislé hlavne od výškovej diferencie v rámci uvažovanej oblasti. Korekcia topografickej zvislicovej odchýlky $\Delta \Theta$ (inklinačná korekcia) pre stred štvorcovej plochy svahu prizmy o hustote $2,67 \text{ g.cm}^{-3}$ je daná vzťahom

$$\Delta\Theta = \begin{Bmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \end{Bmatrix} \cong 0.0066'' \Delta H (1 - 0.35 \operatorname{tg}^2 \delta) \begin{Bmatrix} \cos F \\ \sin F \end{Bmatrix}. \quad (9)$$

Protíhľé sektory svahu majú vplyv proporcionálne k ich výškovým rozdielom navzájom. Z tohoto dôvodu niektoré postupy v určovaní inklináčnej korekcie topografickej zvislicovej odchýlky môžu používať priemernú hodnotu sklonu svahu, zistenú z mapy (obr. 3).



Obr.3. Priemerné hodnoty sklonov svahov.

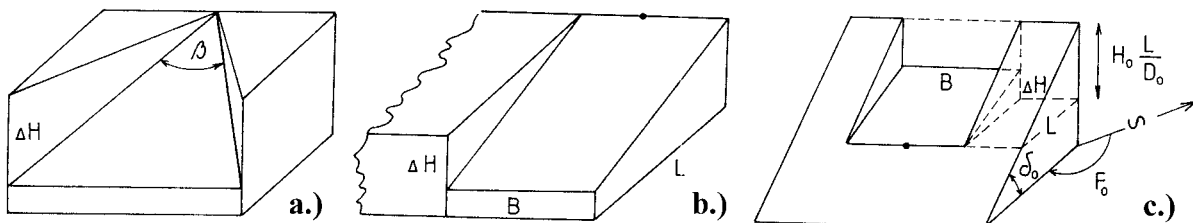
Pre triangulačnú alebo rektangulačnú časť svahu môže byť vzťah (9) násobený váhovým faktorom $p < 1$ (obr. 4 a 5). Ten môže byť použitý i na korekciu zložiek $\Delta\xi, \Delta\eta$ topografickej zvislicovej odchýlky prizmy pre lokálne nepravidelnosti podľa vzťahu

$$\begin{Bmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \end{Bmatrix} \approx 0.006'' \left[\Delta H \begin{Bmatrix} \cos F \\ \sin F \end{Bmatrix} - H_o \frac{L}{D_o} \begin{Bmatrix} \cos F_o \\ \sin F_o \end{Bmatrix} \right] p, \quad (10)$$

kde D_o, H_o, F_o sú parametre celého svahu,

p je váhový faktor určený z grafu (obr. 5) pre triangulačný alebo rektangulačný tvar svahu [$p(B : L), p(\beta)$],

$L, \Delta H, F$ sú parametre uvažovaného terénu.



Obr.4. Korekcia sklonu váhovým faktorom $p(\beta)$ -a), alebo $p(B : L)$ -b) pre modelovanie lokálneho terénu a štítov, pre modelovanie žlabov, korýt a hrebeňov -c).

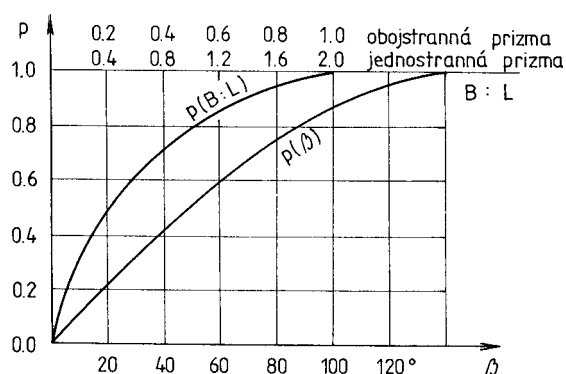
Takúto korekciu sklonu svahu je možno rýchlo určiť kalkulačkou. Jej hodnota je veľmi flexibilná a môže sa použiť viackrát pre jeden bod, t.j. napr. pri modelovaní horských štítov (obr. 4).

Pre točité (nepriamočiare) údolia a príkre vedľajšie (bočné) údolia je tento postup určenia topografických zvislicových odchýlok taktiež aplikovateľný, no pre väčšie bočné údolia sa môže modelovať použitím prízemnej negatívnej hmoty [vzťah (8)]. Ak vzdialenosť bodov, na ktorých sú observované stanoviska, je menšia ako šírka bočných údolí, môže sa vplyv týchto údolí zanedbať.

Praktický výstup

Prezentovaná grafická metóda „rýchleho“ určenia topografických zvislicových odchýlok bola aplikovaná do vysokohorského prostredia Vysokých Tatier. Určovali sa zložky takýchto zvislicových odchýlok na bodoch (štítoch) v Západných Tatrách, ktoré spadajú do 3D geodetickej siete v Žiarskej doline, na ktorých boli už v rokoch 1961 až 1962 určované astronomicko-geodetické zvislicové odchýlky ξ^a, η^a z astronomických a geo-

detických meraní (Hradilek, 1984). Body sú lokalizované na vrcholoch štítov: *Stará Stávka*, *Baranec*, *Ráztoka*, *Prieslop (Baníkov)*, *Prostredný Grúň* a pri vysokohorskej chate v Žiarskej doline - *Žiarska chata*.



Obr.5. Váhový faktor p pre triangulačné alebo rektangu-lačné časti svahov.

Pretože literárny prameň (Hradilek, 1984) neuvádza hodnoty topografických zvislicových odchýlok ξ^{top}, η^{top} v 3D geodetickej sieti v Západných Tatrách, s cieľom objektívneho posúdenia vhodnosti prezentovanej grafickej metódy v určení takýchto topografických zvislicových odchýlok boli určené ich hodnoty späť podľa vzťahov

$$\begin{aligned}\xi^{top} &= \xi^a + \Delta\xi^{a,top}, \\ \eta^{top} &= \eta^a + \Delta\eta^{a,top},\end{aligned}\tag{11}$$

kde $\Delta\xi^{a,top}, \Delta\eta^{a,top}$ sú rozdiely astronomicko-geodetických a topografických zvislicových odchýlok určené z mapy takýchto rozdielov (Gašincová, 1997).

Tab.1 podáva ucelený prehľad dosiahnutých výsledkov v určení zvislicových odchýlok vo vybranej lokalite Vysokých Tatier. Z dôvodu strmých sklonov svahov, rozvetvených údolí, asymetrických horských strání a bočných údolí je možno dosiahnuté hodnoty považovať za extrémne (krajné). Pre grafické určenie zložiek topografických zvislicových odchýlok v Západných Tatrách navrhovanou „rýchlou“ metódou poslúžili jednoduché turistické vrstevnicové mapy Vysokých Tatier v mierke 1:50 000, mapový list č. 112 a 113.

Pre grafické určenie topografických zvislicových odchýlok boli navrhnuté prizmy:

- *Stará Stávka* - pre určenie zložiek zvislicových odchýlok bol zvažovaný vplyv uklonenej plochy jednej voľnej prizmy s pôdorysom štvorcového tvaru; zložky zvislicových odchýlok ξ_o, η_o boli určené zo vzťahu (6).
- *Žiarska chata* - pre určenie zložiek zvislicových odchýlok bol zvažovaný vplyv uklonenej plochy jednej voľnej prizmy s pôdorysom štvorcového tvaru; zložky zvislicových odchýlok ξ_o, η_o boli určené zo vzťahu (6).
- *Baranec* - pre určenie zložiek zvislicových odchýlok bol zvažovaný vplyv uklonených plôch dvoch priziem s pôdorysom trojuholníkového tvaru a jednej prizmy s pôdorysom štvorcového tvaru; inklináčne korekcie $\Delta\xi, \Delta\eta$ boli určené zo vzťahu (9) s prihliadnutím na váhový faktor p .
- *Ráztoka* - pre určenie zložiek zvislicových odchýlok bol zvažovaný vplyv uklonenej plochy jednej voľnej prizmy s pôdorysom štvorcového tvaru; zložky zvislicových odchýlok ξ_o, η_o boli určené zo vzťahu (6).
- *Baníkov* - pre určenie zložiek zvislicových odchýlok bol zvažovaný vplyv uklonených plôch dvoch priziem s pôdorysom trojuholníkového tvaru a jednej prizmy s pôdorysom štvorcového tvaru; inklináčne korekcie $\Delta\xi, \Delta\eta$ boli určené zo vzťahu (9), s prihliadnutím na váhový faktor p .
- *Prostredný Grúň* - pre určenie zložiek zvislicových odchýlok bol zvažovaný vplyv uklonenej plochy jednej voľnej prizmy s pôdorysom štvorcového tvaru; zložky zvislicových odchýlok ξ_o, η_o boli určené zo vzťahu (6).

S cieľom dosiahnuť vyššiu presnosť v určení takýchto zvislicových odchýlok boli na jednotlivých vyššie uvedených bodoch v Žiarskej doline určené aj zložky regionálnych zvislicových odchýlok ξ^{reg}, η^{reg} . Pre ich určenie bol použitý opäť mapový materiál z danej lokality Západných Tatier, v ktorom v okolí jednotlivých bodov geodetickej siete boli horské masívy nahradené voľnými prizmami s pôdorysom obdĺžnikového tvaru. Zložky regionálnych zvislicových odchýlok sú potom determinované súčtom jednotlivých čiastkových hodnôt $\Delta\xi, \Delta\eta$, prislúchajúcich jednotlivým „voľným“ masívom (prizmám), určených podľa vzťahu (8).

Tab.1. Zložky ťažnicových odchýlok v Žiarskej doline.

Bod	F_o [°]		d [m]		ξ_o ["]		ξ^{top} ["]		$\xi^{top} - \xi_o$ ["]		Inklinačné korekcie					ξ^{reg} ["]	$\xi' ["]$	$\xi^{top} - \xi' ["]$	$\xi^a ["]$
	Nadmor. výška	H_o [m]	D_o [m]	η_o ["]	η^{top} ["]	$\eta^{top} - \eta_o$ ["]	F ["]	ΔH [m]	L [m]	ρ	$\Delta \xi$ ["]	$\Delta \eta$ ["]	η^{reg} ["]	$\eta' ["]$	$\eta^{top} - \eta' ["]$	$\eta^a ["]$			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15				
Stará Stávka 1298,9 m	145 230	600 650	-0,364 0,440	-3,061 0,944	2,697 0,504					0 0	0 0	9,227 6,843	5,802 8,227	-8,863 -7,283	-13,0 -7,4				
Žiarska chata 1269,0 m	135 40	83 36	2,909 -3,049	-0,027 -1,253	2,882 1,796					0 0	0 0	2,951 3,694	5,833 -0,608	-5,860 -0,645	-7,4 -1,2				
Baranec 2184,6 m			0 0	-8,29 1,37	-8,290 1,370	75 177 283	750 650 900	1700 1750 1800	0,85 0,70 0,80	-0,86 -0,29	-0,29	-2,863 -0,385	-3,723 -0,625	-4,567 -2,405	-5,5 -1,8				
Ráztoka 1948,0 m	98 700	1600 1800	-0,360 2,306	-10,20 -0,41	-9,840 -2,726					0 0	0 0	-1,787 -5,460	-2,147 -3,154	-8,053 2,734	-6,1 -3,7				
Baníkov 2178,0 m			0 0	-7,06 -0,36	-7,060 -0,360	43 109 249	700 950 800	2850 2000 2400	0,82 0,82 0,40	-0,44	5,12	1,176 -6,708	1,616 -1,588	-7,836 1,228	-2,6 -0,9				
Prostredný Grúň 1771,0 m	197 250	1300 910	5,174 1,389	-1,028 -0,792	-6,202 -2,181					0 0	0 0	3,308 -0,273	7,454 0,32	-8,482 -1,116	-3,9 0				

ξ_o, η_o - zložky topografických ťažnicových odchýlok určených podľa vzťahu (6),

$\Delta \xi, \Delta \eta$ - inklináčne korekcie zložiek ťažnicových odchýlok,

ξ^{top}, η^{top} - zložky topografických ťažnicových odchýlok určených podľa vzťahu (11),

ξ^{reg}, η^{reg} - zložky regionálnych ťažnicových odchýlok,

$\xi' = \xi_o + \Delta \xi + \xi^{reg}, \eta' = \eta_o + \Delta \eta + \eta^{reg}$,

ξ^a, η^a - zložky ťažnicových odchýlok určených astronomicko-geodetickým spôsobom (Hradilek 1984).

Záver

Predkladaná grafická „rýchla“ metóda určovania zvislicových odchýlok vplyvom topografie reliéfu horského a vysokohorského prostredia dáva ďalšiu možnosť pri určovaní zvislicových odchýlok. Dôležitým momentom v tejto grafickej metóde je správna voľba navrhovaných prízemí, ich tvar a veľkosť tak, aby čo najvýstižnejšie charakterizovali horský i vysokohorský reliéf. Čiastočné rozdiely v hodnotách zložiek zvislicových odchýlok určených grafickou metódou a astronomicko-geodetickým spôsobom (Tab.1, stĺpce 14 a 15) môžu byť spôsobené nedostatočným plošným rozsahom pri výpočte regionálnych zvislicových odchýlok a zanedbaním niektorých nevýrazných hrebeňov alebo štítov. Taktiež vzhľadom na dobu, kedy boli určené zložky zvislicových odchýlok v Žiarskej doline astronomicko-geodetickým meraním a k tejto dobe i adekvátnej presnosti vtedajšej meračskej techniky, nie je možné považovať takto určené zložky zvislicových odchýlok za absolútne presné, a preto vzájomné porovnanie zložiek zvislicových odchýlok určených oboma metódami je relatívne (Hradilek 1984).

Článok vznikol na základe riešenia grantového projektu č. 1/7335/20 „Deformačné modelovanie geotektonických recentných pohybov v košickej kotline“.

Literatúra

- Gašincová, S.: Určenie ťažnicových odchýlok bodov geodetických sietí. *Dipl. práca, Kat. geodézie a geofyziky, Fakulta baníctva, ekológie, riadenia a geotechnológií, Technická univerzita v Košiciach, Košice, 1997, 61s., 36 príloh.*
- Gerstbach, G.: Eine Schnellmethode zur Lotabweichungs - Reduktion im Gebirge. *Embacher, 1984, Innsbruck.*
- Gerstbach, G.: Rapid computation of vertical deflection effects on crustal deformation networks. *Tectonophysics, 13, 1986, 427-436.*
- Hradilek, L.: Vysokohorská geodézie, Trigonometrická nivelace a trojrozmerná terestrická triangulace. *Academia, Praha, 1984.*
- Ochaba, Š.: Geofyzika. *SPN, Bratislava, 1986.*
- Sedlák, V., 1997: Transformačné postupy pri určovaní astronomicko-geodetických ťažnicových odchýlok. In: *Súčasný trendy vývoja geodézie, kartografie a podzemného meračstva, 9. medzinárodná banícka konferencia konaná pri príležitosti 45. výročia založenia Baníckej fakulty TU v Košiciach, september, 2.-5., 1997, Košice, s. 79-83.*
- Vykutíl, J.: Vyšší geodézie. *Kartografie, Praha, 1982.*