

## Vyrovnanie meraní vo voľných geodetických sieťach

Gabriel Weiss, Janka Sabová, Silvia Gašincová a Juraj Gašinec<sup>1</sup>

### Adjustment of the observations in a free geodetic networks

Since no datum point in the geodetic network can be accepted as stable until the analysis is performed, the network must be treated as a free network. It means that the network in itself does not contain enough information to be located in space. Examples are a leveling network without elevation information of any point, or a horizontal trilateration and combined net network without the known coordinates of any point and any known azimuth between a pair of points. Therefore, free networks can be freely translated or rotated or scaled in space, and can be considered as suffering from datum defect.

Consider the linearized parametric adjustment model of a free network as  $l+v=A d\hat{C}$  with  $\sigma_0^2 Q_l$  where  $l$  is  $n$  – vector of observations,  $v$  is the  $n$ - vector of residuals,  $d\hat{C}$  is the vector of the corrections to the approximate coordinates of the points to be determined,  $A$  is the configuration matrix,  $\sigma_0^2$  is the a priori variance factor, and  $Q_l$  is the cofactor matrix of the observations. The least squares criterion leads to the normal equations  $N d\hat{C} - A^T Q_l^{-1} dl = 0$ , where  $N = A^T Q_l^{-1} A$ . Due to datum defects in the network, the coefficient matrix,  $N$ , of the normal equations is singular, i.e.,  $\det(N)=0$ . In the set of generalized inverses obtained by (9), subsets of special generalized inverses may be defined by introducing additional conditions. In the following computation upon pseudoinverse of matrix  $N$  is introduced.

**Key words:** datum defects, generalized inverses, pseudoinverse, coefficient matrix of the normal equations.

### Úvod

Realizácia niektorých úloh býva často podmienená špeciálnymi geodetickými prácami, pre ktoré je potrebné vybudovať samostatné lokálne geodetické siete. Ich charakteristickou črtou je vysoká presnosť súradníc bodového poľa. Táto zaručuje, že všetky väzby a funkčné vzťahy medzi bodovým poľom siete a objektom, pre ktorý bola predmetná sieť zriadená, budú v rámci prípustných tolerancií dodržané. Príkladom môžu byť vytyčovacie geodetické siete budované pri výstavbe rozsiahlejších investičných celkov s náročným technickým riešením (Leššo, 1994, Leššo, 1997), deformačné siete pre šetrenie pohybov, zosunov a pretvoreni prírodných a technických objektov alebo pre špecifické, konštrukčne náročné inžinierske diela väčšieho, či menšieho rozsahu.

V takýchto prípadoch sa účelne aplikujú riešenia, ktorých výsledky vyrovnaní sú nezávislé od vplyvu chýb súradníc bodov existujúcich geodetických štruktúr (napríklad Štátnej trigonometrickej siete). Tieto postupy sú v domácej i zahraničnej literatúre známe ako vyrovnanie voľných geodetických sietí.

Predkladaný príspevok uvádza jedno z možných riešení normálnych rovníc v geodetických sieťových štruktúrach metódou zovšeobecnenej inverzie matice. Výhodou navrhovaného postupu je jeho nenáročnosť tak na softvérové, ako i hardvérové vybavenie. Je aplikovateľný na kalkulátoroch, či tabuľkových procesoroch, ktoré sú vybavené len základnými funkciami pre prácu s maticami, ako je násobenie, transponovanie a inverzia. Riešenie navyše nevyžaduje zavádzanie ďalších podmienok do vyrovnaní, čo priaznivo vplyva na zefektívnenie celého spracovateľského procesu.

### Geodetická sieť

Geodetická sieť je štruktúrny útvar, lokalizovaný na zemskom povrchu, prípadne pod ním. Funkčné vzťahy medzi jeho komponentami: bodovým poľom s prislúchajúcimi súradnicami popisujúcimi konfiguráciu siete a meraniami v ňom realizovanými, možno deterministicky vyjadriť sústavou funkčných vzťahov:

$$\tilde{L} = f(\tilde{C}, \dots), \quad (1)$$

v ktorých  $\tilde{L}$  predstavuje skutočné hodnoty observácií a  $\tilde{C}$  skutočné hodnoty konfigurácie. Vplyvom nevyhnutných náhodných chýb (Böhm, 1990, Sütti, 1987), ktoré sa pri praktickom meraní v teréne stávajú súčasťou súborov geodetických dát, prechádza deterministický model (1) do jeho štatistickej formy

$$l+v = f(\hat{C}, \dots), \quad (2)$$

resp.

<sup>1</sup> Prof. Ing. Gabriel Weiss, CSc., Doc. Dr. Janka Sabová, CSc., Ing. Silvia Gašincová, Ing. Juraj Gašinec, Katedra geodézie a geofyziky  
Fakulty BERG Technickej univerzity, Park Komenského 19, 043 84 Košice  
(Recenzovaná a revidovaná verzia dodaná 20.11.2001)

$$l + v = f(C^0 + d\hat{C}, \dots), \quad (3)$$

ktorá vyplýva z nelineárnosti funkčných vzťahov (2) v polohových geodetických sieťach. Symbol  $l$  označuje realizačný vektor náhodnej premennej  $L$ ,  $v$  jeho vektor opráv,  $\hat{C}$  odhad vektora  $\tilde{C}$  a  $C^0 = (x_1^0, y_1^0, \dots, x_k^0, y_k^0)^T$  jeho približné hodnoty, ktoré musia byť známe s presnosťou, zodpovedajúcou 1. členu Taylorovho rozvoja funkčných vzťahov (1).

Vyrovnanie sprostredkujúcich meraní, v ktorom minimalizačný problém vektora opráv  $v$  pri voľbe  $L_2$  normy nadobúda tvar (Cebecauer, 1996; Böhm, 1990).

$$\rho(v_i) = \left( \sum v_i^2 \right)^{1/2} = \min ., \quad (4)$$

vedie k systému normálnych rovníc v tvare

$$A^T Q_1^{-1} A d\hat{C} - A^T Q_1^{-1} dl = 0. \quad (5)$$

Pri vyhovujúcej aproximácii vektora  $\hat{C}$  vektorom  $C^0$ , možno v zmysle (3) vzťahy medzi odhadovanými a sprostredkujúcimi geometrickými parametrami vyjadriť modelovou maticou vzťahov zápisom

$$A = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial f(\hat{C})}{\partial \hat{C}} \end{array} \right\}_{\hat{C}=C^0} \quad (6)$$

a vektor redukovaných observácií

$$dl = l - l_0, \text{ kde } l_0 = f(C^0). \quad (7)$$

Nehomogenitu meraní v sieti popisuje kofaktorová matica  $Q_1$ . Jej zostavenie (napr. Sütti, 1972; Böhm et al., 1990; Ingeduld et al., 1990) vychádza zväčša z predpokladu ich vzájomnej nezávislosti (nekorelovanosti), ktorý býva podporený organizáciou a časovým harmonogramom meraní (Dobeš et al., 1999). Ak však z rôznych príčin (časových, ...) nebolo možné túto požiadavku zabezpečiť a merania boli realizované v relatívne stabilných podmienkach, preukáže sa zväčša vzájomná väzba medzi súbormi geodetických meraní, vyjadrená korelačnými charakteristikami, ktorými sa podrobnejšie zaoberajú práce (Sütti, 1972; Dobeš et al., 1999).

Lineárne rovnice (5) sa obvykle vyjadrujú skrátenejším zápisom

$$N d\hat{C} - A^T Q_1^{-1} dl = 0, \quad (8)$$

kde matica koeficientov normálnych rovníc  $N$  je vždy štvorcová a symetrická. Vypracované postupy riešenia rovníc (8) sa delia na metódy iteračné a priame. Použitie iteračných metód (metód postupnej aproximácie) je vhodné pre veľké systémy rovníc. Do tejto skupiny riešení sa zaraďujú napr. Jacobyho, Gauss – Seidlerova a relaxačná metóda. Druhou skupinou sú metódy priame (finitné), dávajúce riešenie po konečnom počte elementárnych aritmetických operácií. Patria medzi ne napr. metódy Choleskiho, Gaussova eliminačná metóda s výberom hlavného prvku, metóda riešenia pomocou determinantov a metóda maticového riešenia zovšeobecnenej inverzie matice, ktorej v prípade regulárnosti systému zodpovedá inverzia  $N^{-1}$ . U nevhodných sieťových štruktúr možno na riešenie zle podmienených systémov numerických rovníc použiť procedúry singulárnej dekompozície matíc, aplikované napr. na konfiguračnú maticu  $A$  (Skořepa, 1995; Weiss, 1996). Okrem týchto postupov možno napr. Gram – Schmidtovou ortogonalizáciou určiť neznáme parametre priamo z rovníc opráv, bez zostavenia normálnych rovníc.

### Riešenia normálnych rovníc pre voľné geodetické siete

Popri nesporných výhodách vyrovnaní geodetických sietí ako voľných štruktúr, má tento prístup i svoje úskalia, súvisiace so singularitou matice  $N$ , ako dôsledku lineárnej závislosti jej stĺpcov, resp. riadkov. Táto je zapríčinená úbytkom hodnosti konfiguračnej matice  $A$ , označovaným aj ako defekt siete  $d$  (Weiss, Sütti, 1997). Predstavuje nutný počet dátumových parametrov (väzieb), potrebných k eliminácii stupňov voľnosti geodetickej siete v spracovateľskom priestore. V závislosti od druhu meraných veličín je potom v polohových geodetických sieťach trilaterálneho a kombinovaného typu  $d=3$  a v sieťach triangulačných  $d=4$ . Ak sú ako dátumové parametre použité približné súradnice, alebo ak sú tieto viazané v systéme  $d$  podmienok, odpovedajúcim modifikovanej Helmertovej transformácii, označuje sa toto riešenie ako vyrovnanie voľných sietí (Weiss, Sütti, 1997; Ingeduld et al., 1990).

Systém lineárnych rovníc môže byť efektívne riešený pomocou matice  $N^*$ . Všeobecne sa týmto pojmom označuje každá matica  $N^*$ , vyhovujúca podmienke

$$N N^* N = N. \quad (9)$$

Podmienkou (9) nie je zovšeobecnená inverzia určená jednoznačne a vyhovuje jej celá množina matic  $N^-$ , známych ako zovšeobecnené (generalized) inverzie, g-inverzie (Bjerhammar, 1978; Böhm, et al., 1990; Anděl, 1985; Koch, 1988; Kubáčková et al., 1982). Špecifickým prípadom matic  $N^-$  je pseudoinverzná matica  $N^+$ , známa tiež pod názvom Moore – Penroseova inverzná matica, ktorá spĺňa nielen podmienku (9) v tvare

$$N N^+ N = N, \quad (10)$$

ale v zmysle svojej definície (Bjerhammar, 1978; Koch, 1988) vyhovuje aj nasledovným vzťahom ekvivalencie:

$$N^+ N N^+ = N^+; (N N^+)^T = N N^+; (N^+ N)^T = N^+ N. \quad (11)$$

Pseudoinverznú maticu je možné získať tiež rozkladom matice  $N$  na súčin obdĺžnikových matic  $B$  a  $D$  tak, aby sa hodnota matice  $B$  rovnala hodnote matice  $N$  ( $h_B = h_N$ ). Keďže v prípadoch vyrovnania polohových geodetických sietí je úbytok hodnosti matice  $A$ , resp.  $N$  známy a závisí od druhu observovaných veličín, odvodenie matice  $B$  spočíva v odseparovaní  $k - d$  stĺpcov matice  $N$ , kde  $k$  je počet vyrovnávaných súradníc v sieti. Potom

$$N = \begin{pmatrix} B & D \\ k,k & k,k-d \quad k-d,k \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Pre maticu  $N$  možno dokázať, že  $B^T B$  a  $C C^T$  sú regulárne (Anděl, 1985). Z (12) potom pre maticu  $D$  plynie vzťah

$$D = \begin{pmatrix} B^T & B \\ k-d,k & k-d,k \quad k,k-d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B^T & N \\ k-d,k & k,k \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Dosadením (12) do (9), resp. (10), nadobudne hľadaný výraz pre pseudoinverziu  $N^+$  tvar (Bjerhammar, 1978; Anděl, 1985; Koch, 1988; Böhm, et al., 1990)

$$N^+ = D^T (D D^T)^{-1} (B^T B)^{-1} B^T. \quad (14)$$

Riešením systému normálnych rovníc (8) je vzťah

$$d\hat{C} = N^+ A^T Q_1^{-1} dl. \quad (15)$$

Variance (disperzie) vyrovnaných súradníc ležia na diagonále kovariančnej matice

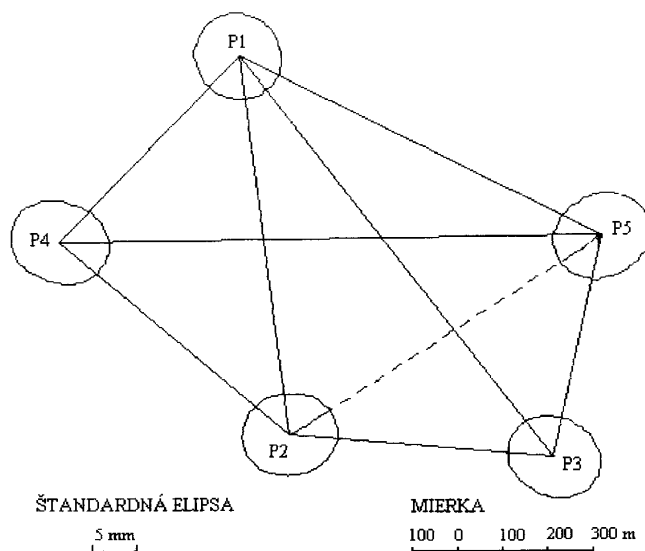
$$\Sigma_{\hat{C}} = s_0^2 N^+. \quad (16)$$

Aposteriórny variančný faktor pre  $n$  realizovaných meraní a  $k$  určovaných parametroch je vyjadrený vzťahom

$$s_0^2 = \frac{v^T Q_1^{-1} v}{n - k + d}. \quad (17)$$

Uvedené teoretické poznatky sú aplikované na typickom príklade:

Polohová lokálna geodetická sieť je tvorená bodmi P1, P2, P3, P4 a P5 (obr.1). Spojovaciú štruktúru medzi nimi tvoria observované vodorovné dĺžky a smery (Tab.2), pre ktoré sa štatistickým testovaním potvrdili štandardné odchýlky  $\sigma_d = (3+3\text{ppm})$  mm pre dĺžky a  $\sigma_s = 5,0''$  pre smery. V súradnicovom systéme S-JTSK je konfigurácia siete daná postupnosťou súradníc  $(x_1, y_1, \dots, x_5, y_5)$ . Ich približné  $C^0$  a vyrovnané  $\hat{C}$  hodnoty sú uvedené v Tab.1.



Obr.1. Geodetická sieť a štandardné elipsy.

Fig.1. Geodetic network and the standard ellipses.

Tab.1. Približné súradnice, odhady ich doplnkov a konštrukčné parametre štandardných chybových elíps.  
 Tab.1. Approximate coordinates, their corrections and structural parameters of the standard error ellipses.

	$x^{\circ}$ [m]	$y^{\circ}$ [m]	$dx^{\wedge}$ [mm]	$dy^{\wedge}$ [mm]	a [mm]	b [mm]	Smerník a [g]
P1	1239001.119	264506.307	-0.3255	-0.0774	1.978	1.870	346.6082
P2	1239842.472	264392.860	-1.0005	-2.9735	2.127	1.829	91.4787
P3	1239894.223	263803.989	-0.8419	1.1334	2.094	1.745	325.6400
P4	1239413.567	264904.339	0.2615	-0.6604	2.222	1.772	319.6651
P5	1239400.523	263697.877	1.9063	2.5778	2.181	1.853	71.2631

Tab.2. Merané veličiny, opravy a smerodajné odchýlky meraní.  
 Tab.2. Observations, corrections and deviation of the observations.

Zámera	l [m]	v [mm]	s(l <sup>^</sup> ) [mm]
P1-P5	901.713	-3.45	3.39
P1-P3	1136.175	-4.81	3.31
P1-P2	848.958	8.79	3.03
P1-P4	573.187	-0.43	3.43
P5-P3	504.970	1.71	3.41
P5-P4	1206.528	1.26	3.59
P2-P4	667.514	-2.54	3.38
P2-P3	591.137	-0.47	3.45
	[g]	[cc]	[cc]
P2-P4	0.0000	-2.73	3.54
P2-P1	47.0431	-2.18	3.10
P2-P5	119.5160	10.05	3.07
P2-P3	161.1567	-5.14	3.57
P4-P1	0.0000	-0.84	3.55
P4-P5	50.4441	-0.44	3.13
P4-P2	95.5561	1.28	3.47
P3-P2	0.0000	3.20	3.55
P3-P1	51.9969	-0.52	3.13
P3-P5	107.8980	-2.68	3.67
P1-P5	0.0000	-3.63	3.12
P1-P3	28.3630	4.65	2.83
P1-P2	62.2539	-2.67	2.93
P1-P4	119.6540	1.66	3.57
P5-P3	0.0000	-0.88	3.62
P5-P2	50.4634	-0.81	2.86
P5-P4	85.8335	3.69	2.86
P5-P1	115.7354	-2.00	3.11

### Matica normálnych rovníc N

4.0180	-0.6578	-1.3220	-0.0475	-0.4992	0.4514	-1.4942	0.7096	-0.7026	-0.4557
-0.6578	2.7694	-0.1735	-0.2111	0.5695	0.0058	-0.5174	-1.5069	0.7792	-1.0572
-1.3220	-0.1735	4.8625	0.2664	-1.8113	0.7802	-1.2885	-0.6428	-0.4407	-0.2303
-0.0475	-0.2111	0.2664	3.0677	-0.5900	-1.3775	0.5457	-1.3446	-0.1746	-0.1345
-0.4992	0.5695	-1.8113	-0.5900	3.6654	-1.0032	0.2414	0.1012	-1.5963	0.9225
0.4514	0.0058	0.7802	-1.3775	-1.0032	3.5473	0.2805	-0.0798	-0.5089	-2.0958
-1.4942	-0.5174	-1.2885	0.5457	0.2414	0.2805	2.2072	-0.1008	0.3342	-0.2080
0.7096	-1.5069	-0.6428	-1.3446	0.1012	-0.0798	-0.1008	3.6669	-0.0672	-0.7356
-0.7026	0.7792	-0.4407	-0.1746	-1.5963	-0.5089	0.3342	-0.0672	2.4054	-0.0285
-0.4557	-1.0572	-0.2303	-0.1345	0.9225	-2.0958	-0.2080	-0.7356	-0.0285	4.0230

### Matica B

4.0180	-0.6578	-1.3220	-0.0475	-0.4992	0.4514	-1.4942
-0.6578	2.7694	-0.1735	-0.2111	0.5695	0.0058	-0.5174
-1.3220	-0.1735	4.8625	0.2664	-1.8113	0.7802	-1.2885
-0.0475	-0.2111	0.2664	3.0677	-0.5900	-1.3775	0.5457
-0.4992	0.5695	-1.8113	-0.5900	3.6654	-1.0032	0.2414
0.4514	0.0058	0.7802	-1.3775	-1.0032	3.5473	0.2805
-1.4942	-0.5174	-1.2885	0.5457	0.2414	0.2805	2.2072
0.7096	-1.5069	-0.6428	-1.3446	0.1012	-0.0798	-0.1008
-0.7026	0.7792	-0.4407	-0.1746	-1.5963	-0.5089	0.3342
-0.4557	-1.0572	-0.2303	-0.1345	0.9225	-2.0958	-0.2080

**Matica D**

1.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	61.9772	-1.0000	-61.9772
-0.0000	1.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	30.6197	0.0000	-31.6197
-0.0000	-0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	53.2799	-1.0000	-53.2799
0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-33.8814	-0.0000	32.8814
-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	8.1349	-1.0000	-8.1349
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	-37.8488	-0.0000	36.8488
-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	1.0000	92.4917	-1.0000	-92.4917

**Matica N<sup>+</sup>**

0.1515	-0.0085	-0.0415	0.0170	-0.0328	0.0139	-0.0604	-0.0361	-0.0168	0.0137
-0.0085	0.1533	-0.0042	-0.0278	0.0389	-0.0419	-0.0736	-0.0245	0.0475	-0.0592
-0.0415	-0.0042	0.1385	0.0064	0.0018	-0.0194	-0.0560	0.0261	-0.0427	-0.0089
0.0170	-0.0278	0.0064	0.1854	-0.0095	-0.0692	0.0345	-0.0112	-0.0483	-0.0772
-0.0328	0.0389	0.0018	-0.0095	0.1338	-0.0199	-0.0152	0.0157	-0.0876	-0.0252
0.0139	-0.0419	-0.0194	-0.0692	-0.0199	0.1719	0.0615	-0.0863	-0.0362	0.0254
-0.0604	-0.0736	-0.0560	0.0345	-0.0152	0.0615	0.1360	-0.0214	-0.0044	-0.0009
-0.0361	-0.0245	0.0261	-0.0112	0.0157	-0.0863	-0.0214	0.1964	0.0157	-0.0744
-0.0168	0.0475	-0.0427	-0.0483	-0.0876	-0.0362	-0.0044	0.0157	0.1517	0.0214
0.0137	-0.0592	-0.0089	-0.0772	-0.0252	0.0254	-0.0009	-0.0744	0.0214	0.1854

**Záver**

Výsledky riešenia demonštračného príkladu sú identické s hodnotami určenými inými postupmi (Gauss – Markovov model s reštrikciami a singulárnou dekompozíciou matice N). Efektívnosť predloženého postupu vyrovnania voľných geodetických sietí vyplýva zo skutočnosti, že v procese riešenia nie je potrebné zmeniť spôsob vyrovnania definovaním ďalších podmienok do výpočtu a z nenáročnosti požiadaviek na softvérové a hardvérové vybavenie. Je zrejme, že postup je ľahko aplikovateľný i pre oblasť 1D a 3D voľných geodetických sietí. Uvedené argumenty poukazujú na vhodnosť jeho využitia pre praktické potreby vyžadujúce postupy vyrovnania meraní vo voľných geodetických sieťach.

**Literatúra**

- ANDĚL, J.: Matematická statistika. *SNTL*, Praha 1985.
- BJERHAMMAR, A.: Generalized matrix algebra. Stockholm 1978.
- BÖHM, J., RADOUCH, V., Hampacher, V.: Teorie chyb a vyrovnávací počet. Geodetický a kartografický podnik, Praha 1990.
- CEBECAUER, D.: Teória chýb a vyrovnávací počet. Vysoká škola dopravy a spojov v Žiline 1996.
- DOBEŠ, J. a kol.: Presné lokálne geodetické siete. *Slovenská kartografia, š.p.*, Bratislava 1999.
- INGEDULD, M., JANDOUREK, J., RATIBORSKÝ, J., BLAŽEK, R.: Geodézie. Metody vyrovnání a výpočtu geodetických sítí. *ČVUT*, Praha 1990.
- JOKL, L., INGEDULD, M.: Geodézie II. Sítě, transformace a geodetické úlohy z hlediska teorie lineárních operátorů. *ČVUT*, Praha 1986.
- KOCH, K.R.: Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models. *Springer – Verlag*, Berlin 1988.
- KUBÁČKOVÁ, L., KUBÁČEK, L., KUKUČA, J.: Pravdepodobnosť a štatistika v geodézii a geofyzike. *VEDA*, Bratislava 1982.
- LEŠŠO, I.: Signalverarbeitung mit dem PC – Computer beim Monitoringssystem für Tunnelöffnungen DAAM 1994, Maribor, 243 – 244
- LEŠŠO, I-ŠUDÁK, M-BUDIŠ, J: Diagnostic system for sfincter pressure evaluation 9<sup>th</sup> International Mining Conference, Slovakia, 1997
- SKOŘEPA, Z.: Aplikace singulárního rozkladu matice při řešení soustavy rovnic oprav. GaKO, ročník 41/83, 1995, číslo 7, str. 137 – 141.
- SÜTTI, J.: Všeobecné chybové charakteristiky veličín. GaKO, ročník 18/60, č.6/1972, str. 131–137.
- SÜTTI, J.: Geodézia. *Alfa*, Bratislava 1987.
- WEISS, G., Sütti, J.: Geodetické lokálne siete I. *Štroffek*, (vyd.), Košice 1997.
- WEISS, G.: Spracovanie geodetických sietí singulárnym rozkladom konfiguračnej matice. *Acta Montanistica Slovaca*, 4/1996, ročník 1, str.311-316.