Transformačné postupy v 3D terestrických súradnicových systémoch

Vladimír Sedlák[1]

Transformation procedures in 3D terrestrial coordinate systems

Transformation procedures belong to the main tasks of surveyor working in a field of geodesy, for example in satellite geodesy or astronomical geodesy. It is necessary to know transformation procedures in 3D terrestrial (Earth) coordinate systems. Increasingly a dynamic advance growth of application of satellite navigation systems, for example GPS (Global Positioning System) into engineering surveying, real estate register and others spheres of applied geodesy and geo-surveying (mine surveying) exacts knowledge of these transformation procedures between coordinates in various coordinate systems. These tasks are common for daily work for various practical surveyors too, not only for theoretical scientific working surveyors.

Conventional Terrestrial System is 3D coordinate system what is the most important coordinate system in global geodesy. Conventional Terrestrial System is an approximation of the nature coordinate system of the Earth. The origin of this coordinate system is placed in the earth substantial centre of gravity and in the centre of geoid. Conventional Terrestrial System is the Cartesian right-handed coordinate system, i.e. positive one. The Local Astronomical System is 3D coordinate system too and it belongs to an important coordinate system in geodesy from its practical point of view. Many geodetic measurements are realized in this coordinate system. Designation of this coordinate system as astronomical system expresses its sticking to a normal line to an equipotential plane, i.e. to a vertical. Local Astronomical system is the left-handed cartesian coordinate system.

Transformation procedures in 3D terrestrial coordinate systems with theory of these systems are presented in the paper. Transformation in the local astronomical coordinate system presents common transformation in a frame of an adjustment of various local geodetic networks. In a case of satellite measurements (GPS, satellite altimetry, etc.) transformation between local and conventional terrestrial coordinate systems are necessary for national grid. Three numerical study cases to make-up presented transformations.

Key words*: Coordinate systems: conventional, instantaneous, local astronomical; matrix of rotation, position and coordinate vector.*

Úvod

Z dôvodu prehľadnejšej názornosti prezentovaných transformačných postupov v terestrických súradnicových systémoch je potrebné si ozrejmiť teoretické základy týchto systémov. Tie sú prezentované v skrátenej forme bez podrobností.

Konvenčný súradnicový systém

Konvenčný zemský 3D súradnicový systém (*CT*), v anglickom jazyku *Conventional Terrestrial System*, je v globálnej geodézii zo všetkých súradnicových systémov najdôležitejší. *CT* systém je v podstate aproximácia prirodzeného súradnicového systému Zeme (Moritz, 1980; Vykutil 1982; Vaníček and Krakiwsky, 1982,1986; Hora, 1990; Cimbálník a Kostelecký, 1992; Mervart a Cimbálník, 1997; Sedlák a Šadera 1998; Sedlák, 1999). Počiatok *CT* systému je v hmotnom ťažisku *C* Zeme a v strede S^G geoidu ($O^{CT} \equiv S^G \equiv C$) (obr.1). Os Z^{CT} prechádza konvenčným medzinárodným počiatkom *CTP* a je totožná so strednou osou o^M rotácie Zeme. Rovina ρ_G^M obsahuje strednú polohu základného (greenwichského) meridiánu (poludníka) a os Y^{CT} je zvolená tak, aby karteziánsky (pravouhlý) súradnicový *CT* systém bol pravotočivý, t.j. kladný. Jednotkový vektor v smere miestneho (lokálneho) zenitu ľubovoľného bodu *B* na zemskom povrchu je vymedzený astronomickou zemepisnou šírkou Φ_B a dĺžkou Λ_B. Rozdiel v definícii zemepisných polárnych súradníc spočíva v tom, že astronomická šírka Φ_B^{CT} a astronomická dĺžka Λ_B^{CT} je spojená s normálou k ekvipotenciálnej ploche a geodetická šírka (φ) a geodetická dĺžka (λ) je spojená s normálou k elipsoidu (Cimbálník, 1987).

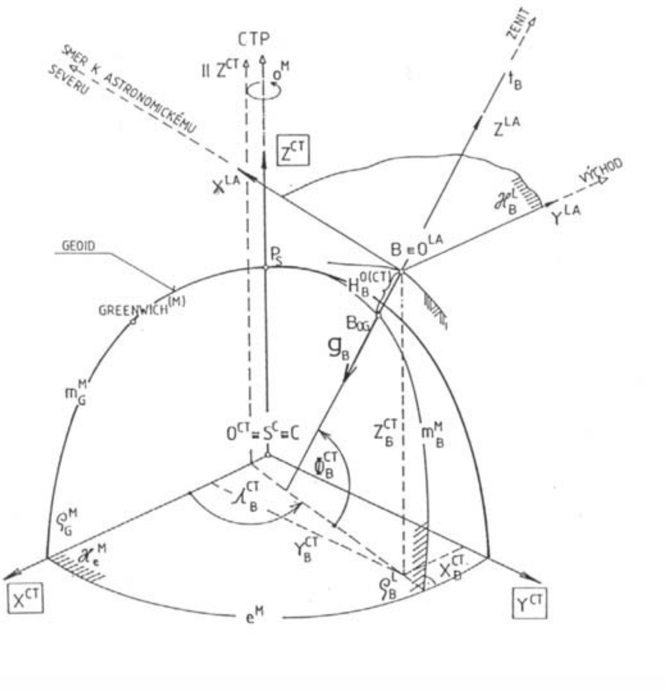
Vektor 3D súradníc bodu *B* v *CT* systéme môžeme schematicky napísať v ich karteziánskom (*K*) vyjadrení v tvare

$$\boldsymbol{C}_B^{CT} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_B^{CT}, \tag{1}$$

alebo v ich polárnom (*P*) vyjadrení v tvare

[1] *Doc. Ing. Vladimír Sedlák, PhD.,* Katedra geodézie a geofyziky, Fakulta BERG, TU Košice, Park Komenského 19, 043 84 Košice
(Recenzovaná a revidovaná verzia dodaná 19.7.2001)

$$\boldsymbol{C}_B^{CT} = \begin{bmatrix} \Phi \\ \Lambda \\ H \end{bmatrix}_B^{CT} . \tag{2}$$



Obr.1. Konvenčný terestrický a lokálny astronomický systém (CT a LA systém).
Fig.1. Conventional Terrestrial and Local Astronomical System (CT and LA system).

<u>Popis k obr.1:</u>

- $(X, Y, Z)^{CT}$ - *základné osi 3D karteziánskeho CT systému;*
- o^M - *stredná os rotácie,* $(o^M \equiv Z^{CT})$;
- *CTP* - *Conventional Terrestrial Pole (konvenčný terestrický pól);*
- O^{CT} - *počiatok CT systému;*
- S^G - *stred geoidu;*
- C - *hmotné ťažisko Zeme,* $(O^{CT} \equiv S^G \equiv C)$;
- m_G^M - *stredný greenwichský astronomický meridián;*
- m_B^M - *miestny (lokálny) stredný meridián bodu B;*
- e^M - *stredný astronomický ekvator;*
- P_s - *pól severný;*
- B - *bod v teréne (stanovisko);*
- B_{OG} - *bod B na geoide;*
- t_B - *ťažnica (zvislica) v bode B;*
- $\boldsymbol{g}_B$ - *vektor tiažového zrýchlenia skutočného tiažového poľa Zeme;*
- $æ_B^L$ - *lokálny horizont bodu B;*
- ρ_G^M - *stredná astronomická meridiánová rovina greenwichská;*
- ρ_B^L - *lokálna astronomická meridiánová rovina bodu B;*
- $æ_e^M$ - *stredná astronomická ekvatoriálna rovina;*
- $(X, Y, Z)^{LA}$ - *základné osi 3D karteziánskeho LA systému;*
- O^{LA} - *počiatok LA systému;*
- $H_B^{O(CT)}$ - *ortometrická (nadmorská) výška bodu B v CT systéme.*
- $(X,Y,Z)^{LA}$ - *základné osi 3D karteziánskeho LA systému;*
- *B, P* - *ľubovoľné body v teréne;*
- O^{LA} - *počiatok LA systému* $(B \equiv O^{LA})$;
- ρ_B^L - *lokálna astronomická meridiánová rovina bodu B;*
- $æ_B^L$ - *lokálny horizont bodu B;*

- t_B - *zvislica v bode B;*
- $\boldsymbol{g}_B$ - *vektor tiažového zrýchlenia skutočného tiažového poľa Zeme;*
- A_{BP} - *astronomický azimut bodu P (z bodu B);*
- $\boldsymbol{D}$ - *vektor šikmej vzdialenosti BP;*
- z_P - *zenitový uhol z bodu B na bod P;*

Okamžitý zemský súradnicový systém

V globálnej geodézii sa v špeciálnych prípadoch (napr. v astronomickej geodézii) môže používať tiež okamžitý zemský (3D) súradnicový systém, patriaci do skupiny geoidických systémov (teleso, na ktoré sa viažu, je geoid). Svoje pomenovanie dostal z anglického názvu *Instantaneous Terrestrial System (IT),* v preklade *Okamžitý zemský systém* (ďalej *IT* systém). Observácie geodetických a astronomických hodnôt sú uskutočňované v časovej epoche τ, v ktorej sa smer okamžitej osi rotácie odlišuje od konvenčného smeru *CTP*. *IT* systém sa od systému *CT* líši iba pootočením osi Z^{CT} od osi Z^{IT} (*obr.2*). V súvislosti s platnosťou $O^{IT} \equiv S^G \equiv C$ je opodstatnené v pomenovaní *IT* (ako aj *CT*) systému uviesť tiež prívlastok *geocentrický systém*.

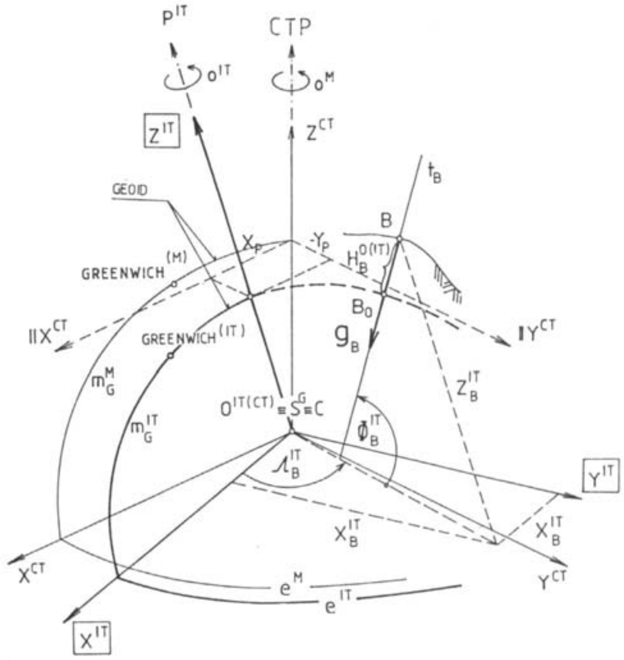
Vektor 3D súradníc ľubovoľného bodu *B* na zemskom povrchu v *IT* systéme môžeme schematicky vyjadriť v karteziánskom (*K*) vyjadrení v tvare

$$\boldsymbol{C}_B^{IT} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_B^{IT}, \qquad (3)$$

alebo v polárnom (*P*) vyjadrení v tvare

$$\boldsymbol{C}_B^{IT} = \begin{bmatrix} \Phi \\ \Lambda \\ H \end{bmatrix}_B^{IT}, \qquad (4)$$

kde Φ_B^{IT} je astronomická šírka bodu *B* v *IT* systéme, Λ_B^{IT} je astronomická dĺžka bodu *B* v *IT* systéme a H_B^{IT} je ortometrická výška bodu *B* v *IT* systéme.



Obr.2. Okamžitý terestrický systém (IT systém).
Fig.2. Instantaneous Terrestrial System (IT sytem).

<u>*Popis k obr.2:*</u>
- $(X, Y, Z)^{IT}$ - *základné osi 3D karteziánskeho IT systému;*
- $(X, Y, Z)^{CT}$ - *základné osi 3D karteziánskeho CT systému;*
- o^{IT} - *okamžitá os rotácie,* $(o^{IT} \equiv Z^{IT})$*;*

- o^M - *stredná os rotácie, ($o^M \equiv Z^{CT}$);*
- *CTP* - *Conventional Interrestrial Pole (konvenčný terestrický pól);*
- P^{IT} - *okamžitý astronomický pól;*
- O^{IT} (O^{CT}) - *počiatok IT (CT) systému;*
- S^G - *stred geoidu;*
- *C* - *hmotné ťažisko Zeme, ($O^{IT(CT)} \equiv S^G \equiv C$);*
- m_G^{IT} - *okamžitý greenwichský astronomický meridián;*
- m_G^M - *stredný greenwichský astronomický meridián;*
- e^{IT} - *okamžitý astronomický ekvator;*
- e^M - *stredný astronomický ekvator;*
- t_B - *zvislica v bode B;*
- $\boldsymbol{g}_B$ - *vektor tiažového zrýchlenia skutočného tiažového poľa Zeme.*

Transformáciu jednotkového vektora $\boldsymbol{J}^{CT}$ do jednotkového vektora $\boldsymbol{J}^{IT}$ vyjadríme nasledujúcim vzťahom (Hora 1990)

$$\boldsymbol{J}^{IT} = \boldsymbol{R}_1(Y_P) \cdot \boldsymbol{R}_2(X_P) \cdot \boldsymbol{J}^{CT} , \tag{5}$$

kde $\boldsymbol{R}_1$ a $\boldsymbol{R}_2$ sú matice pootočení osí *Y* a *X* oboch systémov navzájom, X_P a Y_P sú parametre Chandlerovho pohybu astronomického (zemského) severného pólu z astronomických pozorovaní v časových epochách τ_i, (i=1984,´85,...,´89) v uhlovom vyjadrení, (X_P a Y_P parametre popisujú pootočenie osí oboch uvažovaných systémov).

Pri zvážení veľmi malých hodnôt X_P a Y_P a pri použití rozvoja trigonometrických funkcií do radov so zanedbaním druhých a vyšších členov, dostaneme transformačný vzťah v tvare

$$\boldsymbol{J}^{IT} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & -X_P \\ 0, & 1, & Y_P \\ X_P, & -Y_P, & 1 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{J}^{CT} . \tag{6}$$

Veľkosť parametrov X_P a Y_P spolu s korekciami rotácie Zeme (*UT1 - UTC*) sú spracované periodicky službou *IERS* a v týždennom intervale publikované v *Bulletine-A* (pre rýchle spracovanie s predikciou) a v mesačnom intervale v *Bulletine-B* (pre presnejšie získanie výsledkov). Ročné spracovanie je potom publikované v *„Annual report“* organizáciami *BIPM* (Bureau International des Poids et Mesures, Serves) a *IERS* (Central Bureau of IERS, Paris). Podobné spracovania, ale len z optických observácií, uskutočňuje *Gosstandart*, Moskva. Podrobnejšie informácie je možné získať z mnohých učebníc a článkov geodetickej astronómie (Sedlák, 1999).

Lokálny astronomický súradnicový systém

Samotné transformácie v rámci konvenčných súradnicových systémov sa uskutočňujú na báze medzi lokálnymi a globálnymi súradnicovými systémami. Preto je potrebné ozrejmiť si teoretické základy týchto lokálnych súradnicových systémov, ku ktorým patrí lokálny astronomický a lokálny topografický súradnicový systém. Lokálny astronomický systém, pomenovaný podľa anglického názvu *Local Astronomical System* (ďalej *LA* systém), je z praktického hľadiska ďalší, pre geodéziu dôležitý súradnicový systém, pretože sa v ňom realizuje väčšina geodetických meraní. Označenie *astronomický* vyjadruje jeho viazanosť na normálu k ekvipotenciálnej ploche, t.j. zvislici. *LA* systém je ľavotočivý karteziánsky súradnicový systém $(X,Y,Z)^{LA}$, s počiatkom O^{LA} v ľubovoľnom bode *B* na zemskom topografickom povrchu ($B \equiv O^{LA}$), v ktorom sa uskutočňuje geodetické meranie (*obr.1*). Z uvedeného plynie tiež pomenovanie *topocentrický systém*. Os Z^{LA} smeruje do opačného smeru vektora tiažového zrýchlenia $\boldsymbol{g}$ (t.j. $Z^{LA} = -\frac{1}{|\boldsymbol{g}_B|}\boldsymbol{g}_B$), je teda kladne orientovaná v smere lokálneho zenitu bodu *B*. Osi X^{LA} a Y^{LA} ležia v lokálnom horizonte bodu *B* ($æ_B^L$), pričom os X^{LA} smeruje k astronomickému severu (t.j. os X^{LA} leží v rovine miestneho poludníka ρ_B^L), os Y^{LA} smeruje v ľavotočivom smere na východ a obe osi $(X,Y)^{LA}$ sú kolmé na vektor $\boldsymbol{g}$ (obr.1).

Vektor 3D súradníc ľubovoľného bodu *P* v teréne môžeme schematicky napísať v *LA* systéme v ich karteziánskom (*K*) vyjadrení v tvare

$$\boldsymbol{C}_P^{LA} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_P^{LA} , \tag{7}$$

alebo v ich polárnom (*P*) vyjadrení v tvare

$$\boldsymbol{C}_P^{LA} = \begin{bmatrix} A \\ D \\ z \end{bmatrix}_P^{LA} . \tag{8}$$

Astronomické súradnice (karteziánske i polárne) sa určujú autonómne, t.j. nezávisle od referenčného elipsoidu. Vzťahujú sa k zvisliciam v bodoch meraní a sú to konštantné hodnoty v medziach meračských chýb. V dôsledku nerovnomerného rozloženia hustoty v zemskej kôre a netotožnosti geoidu s referenčným elipsoidom nie sú normály n k elipsoidu v bodoch merania totožné so zvislicami t, t.j. normálami ku geoidu v týchto bodoch. To znamená, že všetky geodetické prístroje sú horizontované v rovinách kolmých na vektor tiažového zrýchlenia $\boldsymbol{g}$ skutočného tiažového poľa Zeme. Pri geodetických a astronomických meraniach sú priamo merateľnými veličinami astronomický azimut A_{BP}, zenitový uhol z_P a šikmá vzdialenosť D z bodu B (stanovisko) na určovaný bod P (cieľ).

Transformačné postupy v 3D terestrických súradnicových systémoch

Vzhľadom na rôznorodosť transformačných postupov v konvenčných 3D súradnicových systémoch uvádzam len dva najdôležitejšie, a to transformáciu medzi karteziánskymi a polárnymi súradnicami v rámci *LA* systému a transformáciu 3D karteziánskych súradníc medzi *LA* a *CT* systémami (Sedlák, 1999).

- <u>LA/1</u> : Transformácia lokálnych polárnych (*P*) súradníc do lokálnych karteziánskych (*K*) astronomických súradníc bodu *P* $\left[\boldsymbol{C}_P^{LA}(P) \rightarrow \boldsymbol{C}_P^{LA}(K)\right]$ v *LA* systéme:

Uvažujeme určenie ľubovoľného bodu *P* v teréne v *LA* systéme (*obr.1*). Dané sú jeho lokálne polárne astronomické súradnice v tomto systéme: astronomický azimut A_{BP}, šikmá priestorová vzdialenosť D medzi počiatkom O^{LA} *LA* systému ($B \equiv O^{LA}$) a zenitový uhol z_P (z bodu B na bod P). Úlohou je výpočet lokálnych 3D karteziánskych súradníc bodu *P* v *LA* systéme: $(X,Y,Z)_P^{LA}$.

Riešenie transformácie spočíva vo vyjadrení polohového vektora $\boldsymbol{D}$ podľa vzťahu

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_P^{LA} = |\boldsymbol{D}| \cdot \boldsymbol{D}_O , \tag{9}$$

kde $|\boldsymbol{D}|$ je skalár vektora $\boldsymbol{D}$, t.j. šikmá vzdialenosť $\overline{BP}$ a $\boldsymbol{D}_0$ je jeho jednotkový vektor, ktorý je funkciou daných polárnych súradníc bodu *P* podľa vzťahu

$$\boldsymbol{D}_0 = \begin{bmatrix} \sin z \cos A \\ \sin z \sin A \\ \cos z \end{bmatrix}_P^{LA} . \tag{10}$$

Po dosadení vzťahu (*10*) do (*9*) dostávame výsledný vzťah prezentovanej transformácie

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_P^{LA} = D \begin{bmatrix} \sin z \cos A \\ \sin z \sin A \\ \cos z \end{bmatrix}_P^{LA} . \tag{11}$$

- <u>LA/2</u> : Transformácia lokálnych karteziánskych (*K*) do lokálnych polárnych (*P*) astronomických súradníc bodu *P* $\left[\boldsymbol{C}_P^{LA}(K) \rightarrow \boldsymbol{C}_P^{LA}(P)\right]$ v *LA* systéme:

Je to inverzná transformácia transformácie <u>LA/1</u>. Dané sú lokálne 3D karteziánske astronomické súradnice bodu *P* v *LA* systéme: $(X,Y,Z)_P^{LA}$. Úlohou je výpočet lokálnych polárnych astronomických súradníc bodu *P* v *LA* systéme: astronomického azimutu A_{BP}, šikmej priestorovej vzdialenosti D medzi bodmi B a P a zenitového uhla z_P (*obr. 1*).

Pri transformácii vychádzame z riešenia goniometrických funkcií, platných v pravouhlých trojuholníkoch (*obr.1*). Z vyplýva napr. nasledujúci vzťah

$$\begin{bmatrix} A \\ D \\ z \end{bmatrix}_P^{LA} = \begin{bmatrix} arctg\,\dfrac{Y_P^{LA}}{X_P^{LA}} \\ \sqrt{\left(X_P^{LA}\right)^2 + \left(Y_P^{LA}\right)^2 + \left(Z_P^{LA}\right)^2} \\ arctg\,\dfrac{\sqrt{\left(X_P^{LA}\right)^2 + \left(Y_P^{LA}\right)^2}}{Z_P^{LA}} \end{bmatrix}_P^{LA} . \tag{12}$$

Príklad č.1:

Transformácia LA/1:

Dané: Polárne súradnice $\mathbf{C}_{P_i}^{LA}(P)$;

- astronomický azimut A_{BP_i};
- šikmá vzdialenosť D_{BP_i};
- zenitový uhol z_{BP_i};

Bod	A_{BP_i}	D_{BP_i} [m]	z_{BP_i}
P_1	38°56′19″ = 43,2651^g	1 503,996	89°27′50″ = 99,4043^g
P_2	154°02′29″ = 171,1571^g	2 074,261	114°28′40″ = 127,3827^g
P_3	285°44′03″ = 317,4824^g	854,953	71°08′43″ = 79,0503^g

Určované: 3D súradnice $\mathbf{C}_{P_i}^{LA}(K)$: $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{P_i}^{LA}$;

Bod	X [m]	Y [m]	Z [m]
P_1	1 169,787	945,201	14,073
P_2	- 1 695,113	825,247	- 864,938
P_3	219,401	- 778,761	276,295

Príklad č.2:

Transformácia LA/2:

Dané: 3D súradnice $\mathbf{C}_{P_i}^{LA}(K)$: $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{P_i}^{LA}$;

Bod	X [m]	Y [m]	Z [m]
P_1	1 330,192	1 073,217	125,971
P_2	1 022,638	711,290	- 1 027,055
P_3	677,459	- 256,366	836,008

Určované: Polárne súradnice $\mathbf{C}_{P_i}^{LA}(P)$;

- astronomický azimut A_{BP_i};

- šikmá vzdialenosť D_{BP_i} ;
- zenitový uhol z_{BP_i} ;

Bod	A_{BP_i}	D_{BP_i} [m]	z_{BP_i}
P_1	$38^\circ 53' 49{,}4'' = 43{,}2190^g$	1 713,789	$85^\circ 47' 05{,}0'' = 95{,}3163^g$
P_2	$34^\circ 49' 13{,}2'' = 38{,}6894^g$	1 614,486	$309^\circ 30' 19{,}1'' = 343{,}8948^g$
P_3	$339^\circ 16' 19{,}9'' = 376{,}9691^g$	1 106,157	$40^\circ 54' 24{,}1'' = 45{,}4519^g$

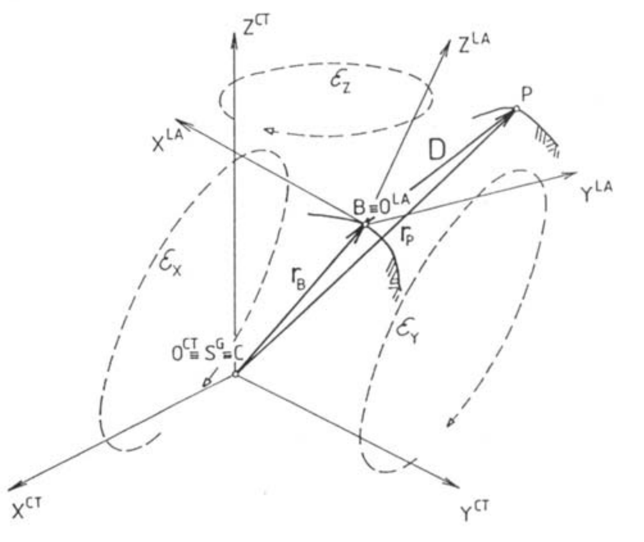
- <u>LA→CT</u> : Transformácia lokálnych karteziánskych (*K*) astronomických súradníc bodu *P* v *LA* systéme do jeho globálnych karteziánskych (*K*) súradníc bodu *P* $\left[\boldsymbol{C}_P^{LA}(K) \rightarrow \boldsymbol{C}_P^{CT}(K)\right]$ v *CT* systéme:

Uvažujeme určenie ľubovoľného bodu *P* v teréne v *CT* systéme, t.j. jeho 3D karteziánske súradnice, ak sú dané jeho lokálne 3D karteziánske súradnice v *LA* systéme: $(X,Y,Z)_P^{LA}$ (*obr.4*). Úlohou je výpočet globálnych 3D karteziánskych súradníc bodu *P* v *CT* systéme: $(X,Y,Z)_P^{CT}$.

Riešenie transformácie uvádzaných súradníc z lokálneho do globálneho systému spočíva v súčte polohových vektorov podľa vzťahu (*obr. 4*)

$$\boldsymbol{r}_P = \boldsymbol{r}_B + \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{D}, \tag{13}$$

kde $\boldsymbol{r}_P$ je polohový vektor bodu *P* v *CT* systéme, $\boldsymbol{r}_B$ je polohový vektor bodu *B* v *CT* systéme, $\boldsymbol{D}$ je polohový vektor bodu *P* v *LA* systéme a $\boldsymbol{R}$ je rotačná matica, zohľadňujúca pootočenie osí *LA* systému vzhľadom k *CT* systému.



Obr.4. Transformačné postupy LA→CT.
Fig.4. Transformation procedures LA→CT.

Vzťah (13) môžeme napísať vo vyjadrení karteziánskych (K) súradníc uvažovaných bodov v tvare

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ X \end{bmatrix}_P^{CT} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_B^{CT} + \boldsymbol{R} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_P^{LA} . \tag{14}$$

Rotačná matica $\boldsymbol{R}$ je (3x3) matica pozostávajúca z troch (3x3) matíc $\boldsymbol{R}_X$, $\boldsymbol{R}_Y$ a $\boldsymbol{R}_Z$, vyjadrujúcich pootočenie osí *X* (matica $\boldsymbol{R}_X$), *Y* (matica $\boldsymbol{R}_Y$) a *Z* (matica $\boldsymbol{R}_Z$) *LA* systému vzhľadom k ekvivalentným osiam *CT* systému. Jej globálne vyjadrenie je dané nasledujúcim vzťahom

$$\underset{3x3}{\boldsymbol{R}} = \underset{3x3}{\boldsymbol{R}_X}(\varepsilon_X) \cdot \underset{3x3}{\boldsymbol{R}_Y}(\varepsilon_Y) \cdot \underset{3x3}{\boldsymbol{R}_Z}(\varepsilon_Z), \tag{15}$$

kde ε_X, ε_Y a ε_Z sú uhly pootočení jednotlivých osí *X, Y,* a *Z* navzájom v oboch uvažovaných systémoch.

Rotačná matica ***R*** je funkciou uhlov pootočení okolo jednotlivých osí. Rotačná matica ***R*** ako i samotná transformácia, sú determinované šiestimi , resp. siedmymi transformačnými parametrami, ktoré môžeme získať z minimálne troch identických bodov v *LA* a *CT* systémoch.

Rotačná matica ***R*** je potom vyjadrená explicitným vzťahom

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, \cos\varepsilon_X, \sin\varepsilon_X \\ 0, -\sin\varepsilon_X, \cos\varepsilon_X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varepsilon_Y, 0, -\sin\varepsilon_Y \\ 0, \quad 1, \quad 0 \\ \sin\varepsilon_Y, \ 0, \ \cos\varepsilon_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varepsilon_Z, \sin\varepsilon_Z, \ 0 \\ -\sin\varepsilon_Z, \cos\varepsilon_Z, 0 \\ 0, \quad 0, \quad 1 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Na samotnú transformáciu je potrebných šesť, resp. sedem transformačných parametrov, získaných z minimálne troch identických (homologických) bodov v *CT* a *G* systéme:

- *mierkové číslo* (*skreslenie*) *m*,
- *3 súradnicové diferencie* (*translácie*) *dX,dY,dZ*,
- *3 uhly pootočení* (*rotácie*) (ε_X, ε_Y, ε_Z , resp. $d\varepsilon_X$, $d\varepsilon_Y$ $d\varepsilon_Z$).

Príklad č.3:

Transformácia LA→CT :

Dané: 3D súradnice $\boldsymbol{C}_P^{LA}(K)$: $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_P^{LA}$;

Bod	X [m]	Y [m]	Z [m]
P	1 160,899	905,137	325,664

Identické body k 7-prvkovej transformácii:

LA-systém:

Bod	X [m]	Y [m]	Z [m]
P_1	1 330,192	1 073,217	125,971
P_2	1 022,638	711,290	- 1 027,055
P_3	677,459	- 256,366	836,008

CT-systém:

Bod	X [m]	Y [m]	Z [m]
P_1	3 327 730,013	2 662 603,227	4 730 587,071
P_2	3 290 415,418	2 610 969,207	4 784 098,536
P_3	3 318 002,651	2 670 258,219	4 731 431,140

7 transformačných prvkov:

- mierkové číslo (skreslenie) m =8,801.10^{-6};
- 3 súradnicové diferencie (translácie) dX =725,988 m; dY =103,054 m; dZ = 396,207 m;
- 3 uhly pootočení (rotácie) $d\varepsilon_X$ = -5,855″; $d\varepsilon_Y$ = -1,993″; $d\varepsilon_Z$ = -5,533″.

Určované: 3D súradnice $\boldsymbol{C}_P^{CT}(K)$: $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_P^{CT}$;

Bod	X [m]	Y [m]	Z [m]
P	3 301 472,025	2 629 844,766	4 750 011,967

Záver

V článku je prezentovaná významná problematika globálnej geodézie, ktorou sú priestorové svetové súradnicové systémy a transformačné postupy v týchto systémoch. Uvedené sú najvýznamnejšie priestorové 3D súradnicové systémy globálneho i lokálneho charakteru, viažuce sa na geoid a transformačné postupy pre priamu i inverznú transformáciu v rámci týchto systémov. Popri odvodeniach základných transformačných vzťahov sú uvedené aj tri numerické príklady vyhodnotenia prezentovaných transformácií dvojíc súradnicových systémov. Náročnosť transformačných postupov si vyžaduje vhodnú softvérovú podporu, ktorá je dnes v komerčnej geodetickej sfére bežne prístupná (Kunák 1992, Schenk 1999). Teoretické postupy uvedené v jednotlivých transformáciách však dovoľujú vytvoriť príslušný softvér i geodetovi v akejkoľvek praktickej oblasti globálnej geodézie, ktorý by mal pri súčasnej hardvérovej technológii a operatívnosti v spracovaní nameraných dát ovládať algoritmus príslušného softvéru.

Článok vznikol v súvislosti s riešením grantového projektu č.1/7335/20: „Deformačné modelovanie geotektonických recentných pohybov v Košickej kotline“ a č.1/8073/01: „Monitorovanie deformačných procesov a integrované hodnotenie ich environmentálnych rizík na podrúbaných a zosuvných územiach“, riešených na Fakulte BERG TU v Košiciach.

Literatúra

CIMBÁLNÍK, M.: Geometrické konstanty referenčních elipsoidů. Geodetický a kartografický obzor, roč. 33/75, 1987, č. 8, s.207-211.

CIMBÁLNÍK, M. a KOSTELECKÝ, J.: Globální, kontinentální a národní geodetické referenční systémy – cesty ČSFR do Evropy. Geodetický a kartografický obzor, roč. 38/80, 1992, č. 9, s.180-189.

HORA, L.: Vyšší geodezie (Doplňkové skriptum). *ČVUT Praha*, Praha, 1990.

KUNÁK, L.: Družicová geodézia z hľadiska banského meračstva. In: Zborník. 8 BVTK konferencia pri príležitosti 40. výr. založenia BF TU Košice, september 1992, Košice, s.62-71.

MERVART, L. a CIMBÁLNÍK, M.: Vyšší geodezie 2. *ČVUT Praha*, Praha, 1997.

MORITZ, H.: Geodetic Reference System 1980. Bull. Géod., Vol.54, No.3, 1980, p.395-405.

SCHENK, J.: Využitží GPS při měření vplyvu poddolování. VŠB-TU Ostrava, 1997.

SEDLÁK, V.: Transformačné postupy pri určovaní astronomicko-geodetických ťažnicových odchýlok. In: Súčasné trendy vývoja geodézie, kartografie a podzemného meračstva, 9. medzinárodná banícka konferencia konaná pri príležitosti 45. výročia založenia Baníckej fakulty TU v Košiciach, 2.-5.september, 1997, Košice, s.79-83.

SEDLÁK, V. a ŠADERA, M.: Globálna geodézia I. *Štroffek*, Košice, 1998.

SEDLÁK, V.: Zem a priestorové súradnicové systémy. *Štroffek*, Košice, 1999.

VANÍČEK, P. & KRAKIWSKY, E.: Geodesy: the Concepts. 1. ed., Amsterdam-New York-Oxford, 1982; 2. ed, Amsterdam - New York –Oxford - Tokyo, 1986.

VYKUTIL, J.: Vyšší geodezie. Kartografie, Praha, 1982.