Štatistické hodnotenie pevnosti v prostom tlaku andezitu Ruskov

***Milan Labaš* [1] *a František Krepelka* [1]**

The statitistical evaluation of the uniaxial compressive strength of the Ruskov andesite

The selection of a suitable model of the statistical distribution of the uniaxial compressive strength is discussed in the paper. The uniaxial compressive strength was studied on 180 specimens of the Ruskov andesite. The rate of loading was 1MPa.s^{-1}*. The experimental specimens had a prismatic form with a square base; the slightness ratio of specimens was 2:1. Three sets of specimens with a different length of the base edge were studied, namely 50, 30 and 10 mm. The result of the measurement were three sets with 60 values of the uniaxial compressive strength. The basic statistical parameters: the sample mean, the sample standard deviation, the variational interval, the minimum and maximum value, the sample obliqueness coefficient and the sharpness coefficient were evaluated for each collection. Two types of the distribution which can be joined with the real physical fundamentals of the desintegration of rocks (the normal and the Weibull distribution) were tested. The two-parametric Weibull distribution was tested. The basic characteristics of both distributions were evaluated for each set and the accordance of the model distribution with an experimental distribution was tested. The* χ^2*-test was used for testing. The two-parametric Weibull distribution was selected following the comparison of the test results of both model distributions as a suitable distribution model for the characterization of uniaxial compressive strength of the Ruskov andesite. The two-parametric Weibull distribution showed better results of the goodness-of-fit test. The normal distribution was suitable for two sets; one of the sets showed a negative result of the goodness-of-fit testing. At the uniaxial compressive strength of the Ruskov andesite, a scale effect was registered : the mean value of uniaxial compressive strength decreases with increasing the specimen base edge. This is another argument for using the Weibull distribution as a suitable statistical model of the uniaxial compressive strength distribution. The Weibull distribution unlike the normal distribution enables the physical interpretation of the scale effect influence on uniaxial compressive strength value.*

Key words*: uniaxial compressive strength, basic statistical parameters, normal and Weibull distribution.*

Úvod

Vzhľadom na to, že štruktúra hornín na mikroskopickej aj makroskopickej úrovni je výrazne nerovnorodá a začiatok porušenia horniny je jav úzko lokalizovaný, je nutné posudzovať veľký rozptyl výsledkov stanovovania pevnosti ako fyzikálny aspekt samotného javu porušovania. Pevnosť horniny je úzko spojená s defektami jej štruktúry, konkrétne s koncentráciou a stupňom nebezpečnosti defektov danej vzorky. Ak je pre porušenie nutný kritický počet alebo určitý kritický stupeň nebezpečnosti defektov štruktúry, potom o tom, či dôjde alebo nedôjde k porušeniu, rozhoduje štatistické očakávanie vzniku takýchto kritických podmienok v danej vzorke.

Metodika stanovenia základných štatistických charakteristík a parametrov modelových rozdelení

Experimenty pre určenie vhodného štatistického modelu rozdelenia pevnosti v prostom tlaku boli robené na 180 vzorkách. Vzorky boli zhotovené v tvare kvádra so štvorcovou podstavou a štíhlostným pomerom 2:1, pri troch rôznych šírkach podstavy, a to 10, 30 a 50 mm, t.j. pri každom rozmere podstavy bolo skúšaných 60 vzoriek. Vzorky boli zhotovené v súlade s normou ON 44 1110. Samotné skúšky pevnosti boli robené v súlade s normou ON 44 1111. Rýchlosť zaťažovania bola 1 MPa.s^{-1}. Medzi čeľuste lisu a podstavy vzorky neboli vkladané žiadne vložky. Výsledkom meraní boli tri súbory hodnôt pevností v prostom tlaku, t.j. tri súbory podľa veľkosti podstavy. Súbory boli označené symbolmi A(50), A(30), A(10), kde A označuje andezit Ruskov a číslo v zátvorke veľkosť podstavy vzorky v mm.

V každom súbore boli vyhodnotené tieto základné štatistické charakteristiky: výberový priemer, výberová štandartná odchýlka, minimálna a maximálna hodnota, variačné rozpätie, výberový koeficient šikmosti a výberový koeficient špicatosti (viď tab.1).

Výsledné hodnoty pevnosti v prostom tlaku v každom súbore boli zoradené podľa vzostupnej veľkosti a každý súbor bol rozdelený do tried podľa veľkosti, pričom počet tried bol určený podľa Sturgesovho pravidla (Hanousek, Charamza, 1992). Na základe rozdelenia súborov do tried boli urobené histogramy pevnosti v prostom tlaku pre každý súbor (viď obr.1).

Pre určenie vhodného štatistického rozdelenia pevnosti boli vybrané dve rozdelenia: normálne a Weibullove, ktoré možno spojiť s reálnou fyzikálnou podstatou rozpojovania a ktoré sú všeobecne najviac používanými pre hodnotenie pevnosti rôznych materiálov.

Náhodná veličina X má normálne rozdelenie $N(\mu,\sigma^2)$ s parametrami μ a σ^2, $-\infty<\mu<\infty$, $\sigma^2>0$, ak je jej distribučná funkcia (Lurie, Moore, 1994):

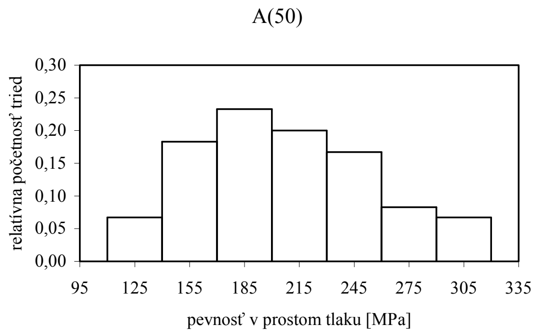
[1] *Ing.Milan Labaš, Ing.František Krepelka,PhD*, Ústav Geotechniky SAV, Watsonova 45, Košice, e-mail:labaš@saske.sk, krepelka @ saske.sk

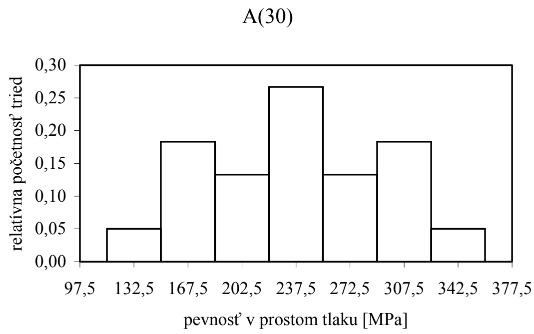
(Recenzované, revidovaná verzia dodaná do 10.12. 2001)

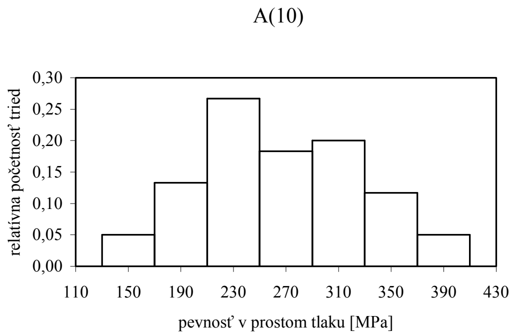
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2}\right]dt\ , \qquad (1)$$

kde μ je stredná hodnota (matematická nádej) a σ^2 je rozptyl (disperzia).

V prípade náhodného výberu z normálneho rozdelenia je výberový priemer $\bar{x}$ najlepším nevychýleným odhadom strednej hodnoty μ, výberový rozptyl s^2 je najlepším nevychýleným odhadom rozptylu σ^2.







Obr.1. Histogramy rozdelenia pevnosti v prostom tlaku andezitu Ruskov pre súbory A(50), A(30) a A(10).
Fig.1. The histograms of uniaxial compressive strength distribution of the Ruskov andesite for the sets A(50), A(30) and A(10).

Maximálne vierohodné odhady strednej hodnoty a rozptylu boli využité pri overovaní zhody s normálnym rozdelením pomocou Pearsonovho χ^2 - testu, ktorý vychádza z triedneho delenia náhodného výberu. Maximálne vierohodné odhady strednej hodnoty a rozptylu boli určené podľa vzťahov (Likeš, Machek, 1988):

$$\bar{x}^{*}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r}n_j\bar{t}_j\ , \qquad (2)$$

$$s^{2*}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r}n_j\left(\bar{t}_j-\bar{x}^{*}\right)^2\ , \qquad (3)$$

kde r – počet tried,

$\bar{t}_j$ - stred j–tej triedy.

Hodnoty najlepších nestranných a maximálne vierohodných odhadov strednej hodnoty a smerodatnej odchýlky výberu z normálneho rozdelenia každého súboru pevnosti v prostom tlaku sú uvedené v tabuľke 1.

Náhodná veličina X má Weibullove rozdelenie s parametrami X a c, $\delta > 0$, $c > 0$, ak je jej distribučná funkcia (v prípade vyhodnocovania pevnosti v prostom tlaku sa uvažovalo s dvojparametrickým Weibullovým rozdelením) (Likeš, Machek, 1987) :

$$F(x)=1-\exp\left[-\left(\frac{x}{\delta}\right)^{c}\right]\ , \text{ ak } x>0\ ,$$

$$F(x)=0\ , \text{ ak } x\le 0\ . \qquad (4)$$

Prvé odhady parametrov c a □ boli stanovené graficky, pričom sa vychádzalo z usporiadanej postupnosti výsledkov pevnostných skúšok:

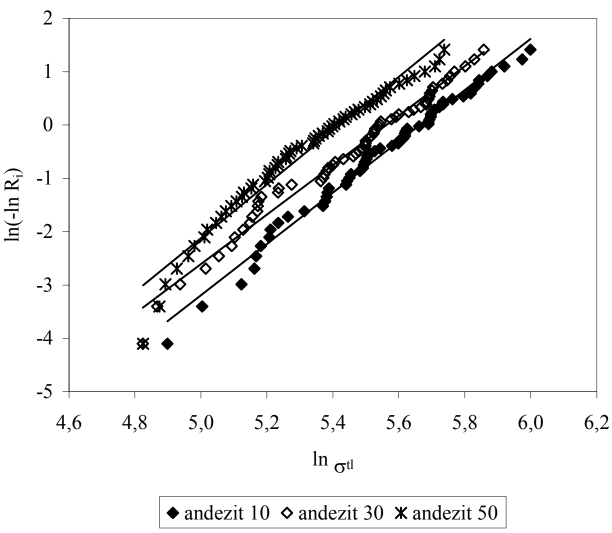
$$\sigma_{tl1}\le\sigma_{tl2}\le\ldots\le\sigma_{tli}\le\ldots\le\sigma_{tln}\ . \qquad (5)$$

Logaritmovaním a úpravou prejde rovnica (4) na tvar, ktorý umožňuje určenie charakteristík rozdelenia pevnosti podľa voľby stupňa spoľahlivosti R, t.j.:

$$\ln\sigma_i = \frac{1}{c}\ln\left(-\ln R_i\right) + \ln\delta\,,\ \text{resp.}\ \ln(-\ln R_i) = c(\ln\sigma_i - \ln\delta)\,, \tag{6}$$

kde R_i - pravdepodobnosť, že pri napätí σ_i nedôjde k porušeniu vzorky, δ - modálna pevnosť.

Tvar rovnice (6) zodpovedá rovnici priamky y = a.x + b. Pre určenie tejto priamky sme získali n = 60 experimentálnych bodov pre každý súbor, ktorými bola preložená priamka a boli určené prvé odhady parametrov c_g a δ_g (viď obr.2). Grafické odhady parametrov c_g a δ_g sú uvedené v tabuľke 1.



Obr.2. Priamky preložené súbormi experimentálnych bodov pre určenie grafických odhadov parametrov dvojparametrického Weibullovho. rozdelenia pevnosti v prostom tlaku.
Fig.2. The correlation lines for the sets of experimental points for the graphical estimation of the parameters of the twoparametric Weibull distribution.

Na základe stanovených grafických odhadov parametrov boli vypočítané maximálne vierohodné odhady parametrov c^* a δ^*, podľa nasledujúceho postupu (Likeš, Machek, 1988). Pre výpočet maximálne vierohodných odhadov parametra c^* bola použitá rovnica:

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^c \ln\sigma_i}{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^c} - \frac{\sum_{i=1}^{n}\ln\sigma_i}{n}\right]^{-1} = c\,. \tag{7}$$

Rovnica (7) bola riešená numericky s presnosťou na 10^{-5}. Po výpočte maximálne vierohodného odhadu parametru c^* pre každý súbor boli určené maximálne vierohodné odhady parametrov δ^* podľa vzťahu:

$$\delta^* = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^{c^*}\right)^{\frac{1}{c^*}}\quad. \tag{8}$$

Ako prvá aproximácia pre určenie maximálne vierohodného odhadu parametru c^* bola použitá hodnota grafického odhadu parametru c_g.

Hodnoty maximálne vierohodných odhadov parametrov c^* a δ^* pre každý súbor sú uvedené v tabuľke 1.

Po stanovení potrebných parametrov, resp. ich odhadov, bola overovaná zhoda empirických rozdelení s modelom, t.j. boli urobené testy dobrej zhody modelového rozdelenia s normálnym a Weibullovým rozdelením. Pre overenie hypotéz o tvare rozdelenia s výsledkami pokusov bol robený χ^2 -test. Hypotéza o tvare distribučnej funkcie sa zamieta, ak vypočítaná hodnota χ^2 je väčšia ako tabelovaná hodnota $\chi^2_{1-\alpha}$ na danej hladine významnosti α s (r-1-k) stupňami voľnosti, kde k je počet nezávislých parametrov daného rozdelenia. Výsledky testovania výsledkov pokusov s normálnym a Weibullovým rozdelením sú uvedené v tabuľke 1.

Výsledky a diskusia

Pri porovnávaní základných štatistických znakov jednotlivých súborov je na prvý pohľad zrejmý pokles výberového priemeru s narastajúcou veľkosťou vzorky a zároveň aj pokles hodnoty výberovej štandartná odchýlky s narastajúcou veľkosťou vzorky. Podobný trend je zrejmý aj pri maximálnych hodnotách. Minimálne hodnoty v súboroch A(50) a A(30) sú takmer rovnaké, v súbore A(10) je o niečo vyššia, čo však zrejme súvisí s problémami pri zhotovovaní malých vzoriek. Spomenuté trendy možno jednoznačne priradiť vplyvu rozmerového efektu.

Ako vidno z tabuľky 1, v prípade súborov A(50) a A(30) výsledky testovania dobrej zhody nebolo treba zamietnuť pre oba typy rozdelení, pričom hodnoty testovacej charakteristiky χ^2 na hladine významnosti 0,05 sa u oboch rozdelení veľmi nelíšili. Na základe týchto výsledkov nie je možné jednoznačne označiť vhodnejší štatistický model rozdelenia pevnosti v prostom tlaku. Iná je situácia u súboru A(10), kde výsledok testovania dobrej zhody potvrdil jednoznačne vhodnosť dvojparametrického Weibullovho rozdelenia a nevhodnosť normálneho rozdelenia pre popis rozdelenia pevnosti v prostom tlaku andezitu Ruskov.

Podľa Freudenthala (1975) možno k obom skúmaným rozdeleniam priradiť zodpovedajúci fyzikálny model rozpojovania, Weibullovmu rozdeleniu model najslabšieho článku a normálnemu rozdeleniu model klasického zväzku. Analýza oboch rozdelení jednoznačne potvrdila, že vplyv rozmerového efektu je možné vysvetliť len v prípade Weibullovho rozdelenia. Napriek tomu sa v technickej praxi pre popis pevnosti krehkých látok bežne využíva aj normálne rozdelenie (Menčík, 1990; Němec, Sedláček, 1982; Yamaguchi, 1970). Němec a Sedláček (1982) uvádzajú, že ak hodnota parametra c (tento parameter vymedzuje tvar rozloženia pevnosti) z distribučnej funkcie Weibullovho rozdelenia nadobúda hodnotu 3,43, možno v takom prípade nahradiť Weibullove rozdelenie normálnym. V našom prípade nadobúda parameter c hodnotu 4,8215 (priemer z troch zistených hodnôt), takže nie je dôvod pre aproximáciu Weibullovho rozdelenia normálnym. Pre jednotlivé súbory mali rovnice pre určenie grafických odhadov charakteristík dvojparametrického Weibullovho rozdelenia takýto tvar (obr.2): A(50): $y = 5{,}0439 - 27{,}3381$, ($R^2 = 0{,}9628$), A(30): $y = 4{,}6455 - 25{,}8356$, ($R^2 = 0{,}9822$), A(10): $y = 4{,}8078 - 27{,}2319$, ($R^2 = 0{,}9870$).

Tab.1. Základné charakteristiky štatistického rozdelenia pevnosti v prostom tlaku a výsledky testovania dobrej zhody pre andezit Ruskov.
Tab.1. The basic characteristics of the statistical distribution of uniaxial compressive strength and the results of goodness-of-fit testing of the Ruskov andesite.

	andezit 50 – A(50)	andezit 30 – A(30)	andezit 10 – A(10)
výberový priemer [MPa]	207,77	238,04	264,45
výberová štandartná odchýlka [MPa]	47,337	56,353	61,726
minimálna hodnota [MPa]	124,50	124,44	134,06
maximálna hodnota [MPa]	310,27	349,64	403,11
variačné rozpätie [MPa]	185,77	225,20	269,05
výberový koeficient šikmosti	0,3040	-0,1034	0,0827
výberový koeficient špicatosti	-0,6802	-0,8305	-0,5460
Normálne rozdelenie			
najlepší nevychýlený odhad stred. hodn. [MPa]	207,77	238,04	264,45
najlepší nevychýlený odhad štand. odch. [MPa]	47,337	56,353	61,726
maximál.vierohod. odhad stred. hodn. [MPa]	207,00	237,50	266,00
maximál.vierohod. odhad štand. odch. [MPa]	48,332	56,796	61,406
hodnota χ^2 ($\chi^2_{(0,95)}(4)=9,4877$)	3,6283	7,7634	25,9414
Weibullove rozdelenie			
koeficient c_g	5,0439	4,6455	4,8078
hodnota δ_g	225,89	260,19	288,33
koeficient c^*	4,7940	4,8820	4,7886
hodnota δ^*	226,73	259,99	288,67
stredná hodnota [MPa]	207,67	238,38	264,38
smerodatná odchýlka [MPa]	49,429	55,806	62,992
hodnota χ^2 ($\chi^2_{(0,95)}(4)=9,4877$)	4,7283	7,7125	3,0125

Hodnoty koeficientov determinácie naznačujú vysokú spoľahlivosť určenia potrebných parametrov Weibullovho rozdelenia. Odchýlka v hodnotách maximálne vierohodných odhadov parametra c je menšia ako 2 %. Hodnoty maximálne vierohodných odhadov modálnej pevnosti δ majú klesajúci charakter s narastajúcou veľkosťou vzoriek, čo je v súlade s modelom najslabšieho článku, ktorý reprezentuje fyzikálnu stránku popisu pevnosti pomocou Weibullovho rozdelenia.

Záver

Na základe analýzy výsledkov stanovenia pevnosti v prostom tlaku andezitu Ruskov, určenia základných štatistických charakteristík troch súborov hodnôt pevnosti, následného testovania vhodnosti použitia dvoch modelových rozdelení a na základe znalostí o vlastnostiach daných rozdelení možno povedať, že pre popis rozdelenia pevnosti v prostom tlaku andezitu Ruskov je vhodné dvojparametrické Weibullove rozdelenie s parametrami, uvedenými v tabuľke 1.

Literatúra

FREUDENTHAL, A., M.,1975: Statističeskij podchod k chrupkomu razrušeniju. In: *Liebowitz,H.: Razrušenije. Tom 2.Matematičeskije osnovy teoriji razrušenija (ruský preklad: Fracture and Advanced Treatise. Volume 2. Mathematical Fundamentals, New York: Academic Press, 1968)* , Moskva: Mir, 1975.

HANOUSEK, J., CHARAMZA, P.,1992: Moderní metody zpracování dat. Matematická statistika pro každého. Praha: *Educa´99*, 1992.

LIKEŠ, J., MACHEK, J.,1987: Počet pravdepodobnosti. Praha: *SNTL*, 1987.

LIKEŠ, J., MACHEK, J.,1988: Matematická statistika. Praha: *SNTL*, 1988.

LURIE, D., MOORE, R.H.,1994: Applying Statistics. NUREG-1475. Washington: *United States Nuclear Regulatory Comission*, 1994.

MENČÍK, J.,1990: Pevnost a lom skla a keramiky. Praha: *SNTL*, 1990.

NĚMEC, J., SEDLÁČEK, J.,1982: Statistické základy pevností konstrukcí. Praha: *Academia*, 1982.

YAMAGUCHI, U.,1970: The number of test-pieces required to determine the strength of rock. In:*International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Volume 7, Number 2, March 1970, Oxford: p.209-227.