

## Zvyšovanie redundancie a Durnevova metóda odvedenia dĺžok v polygonometrických štruktúrach

Juraj Gašinec<sup>1</sup>, Dušan Dugáček<sup>2</sup>, Silvia Gašincová<sup>1</sup>

### *Increase of redundancy and the Durnev method of distance determination in traverse*

*Traverses belong to oftentimes used geodetic structures. Increasing the traverse redundancy to obtain better quality parameters is therefore a natural effort. This can be done by adding new measured values by the Durnev method to quantities of standard traverse measurement. The processing demands the least squares adjusting procedure. Presented example clearly point to advantages of this method. This paper also introduce the GeoNET application. The solution was created in MDL program language and is operating under the MicroStation internal environment. The application is used for the adjustment of two-dimensional geodetic networks and it is a very useful tool for students of the Department of Geodesy and Geophysics in Technical University of Košice.*

**Key words:** Durnev's method, traverses, MicroStation, MDL

### Úvod

Polygonové ťahy patria v geodetickej praxi k najčastejšie sa vyskytujúcim geodetickým štruktúram. Táto skutočnosť vyplýva predovšetkým z ich vysokej tvarovej flexibilitnosti, ktorá je pri práci v teréne determinovaná jeho morfológickou členitosťou, porastom, či inými prírodnými prekážkami. Tvar polygonových ťahov v intraviláne je pružne modifikovaný priebehom uličných pásov, hustotou zástavby, dopravy, prípadne ďalšími trvalými alebo dočasnými objektmi a prekážkami. Tvarová flexibilita polygonových ťahov je zvlášť vítanou vlastnosťou pri geodetických prácach súvisiacich s výstavbou a rekonštrukciou líniových objektov, ako sú napr. rozvody rôznych médií a energií, k tratiam ktorých sa polygonové ťahy ľahko primykajú a ich priebeh sú schopné plynulo sledovať. Ďalšou, nemenej významnou skutočnosťou zvyšujúcou presnosť polygonových ťahov a následne aj ich význam je zavedenie elektronických diaľkometerov a univerzálnych meracích staníc pri zbere dát v teréne. Vďaka nim možno rýchlo a s požadovanou presnosťou určovať vzdialenosti medzi bodmi. K štandardnému vybaveniu týchto prístrojov už zväčša patrí softvér priradujúci k meraným dĺžkam potrebné matematické a fyzikálne korekcie, čím sa nezanedbateľne zefektívňuje celkový proces geodetických meracích a spracovateľských prác.

### Metódy vyrovnania polygonových ťahov

Súradnice vrcholov polygonového ťahu sa určujú na základe spracovateľských metód, ktoré sa v zásade rozdeľujú na metódy približné a metódy vyrovnania odvodené z podmienky minima niektorej normy vektora opráv meraných uhlov a dĺžok v polygonovom ťahu.

Výhodou približných metód vyrovnania je ich jednoduchosť a nenáročnosť, tak na technické, ako aj softvérové vybavenie. Postupom približného vyrovnania sa podrobne venuje množstvo geodetickej literatúry. Podľa § 144 (Inštrukcia, 1994) možno približné metódy vyrovnania polygonových ťahov použiť pre výpočet súradníc bodov podrobného bodového polohového poľa (PBPP) všetkých tried presnosti.

Z druhej kategórie vyrovnávacích metód zaujíma pri riešení geodetických úloh dominantné postavenie metóda najmenších štvorcov (MNŠ), odvodená z L2 normy vektora opráv. Vyrovnanie polygonových ťahov podľa MNŠ sa v § 155 (Inštrukcia, 1994) odporúča predovšetkým pri určovaní PBPP 1. a 2. triedy presnosti. Vďaka svojmu prepracovanému matematickému aparátu umožňuje MNŠ stanoviť pre konfiguráciu siete potrebné charakteristiky presnosti a vytvára priestor pre štatistickú analýzu realizovaných meraní (Ratiborský, 1994; Weiss, 1993; Weiss, 1996; Sutti, 1998).

Nemenej významnou vlastnosťou tejto vyrovnávacej metódy je otvorenosť množiny meraných veličín pre vstup nových prvkov, čo sa priaznivo prejavuje v celkovej preurčenosti (redundancii) meraní v polygonovom ťahu. Opodstatnenosť zvyšovania redundancie a jej formy, založené na zaradení pomocných stanovísk pozdĺž polygonového ťahu, tvoriacich s jeho vrcholmi všeobecné líniové reťazce, je podrobne analyzovaná v (Weiss, 1996).

Pri hľadaní efektívneho spôsobu zaradenia ďalších meraní do geodetických štruktúr polygonometrického typu je výhodné vychádzať z Durnevovej metódy odvedenia dĺžok polygonových strán (Michalčák, 1985,

<sup>1</sup> Ing. Juraj Gašinec a, Ing. Silvia Gašincová. Katedra geodézie a geofyziky Fakulty BERG Technickej univerzity v Košiciach, 043 84 Košice, Park Komenského 19

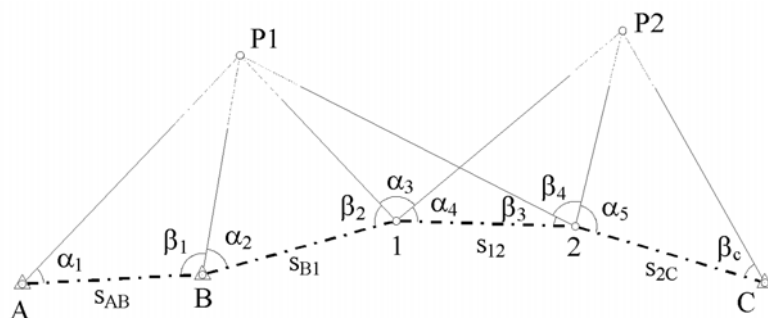
<sup>2</sup> Ing. Dušan Dugáček. Katedra geológie a mineralógie Fakulty BERG TU v Košiciach, 043 84 Košice, Park Komenského 15 (Recenzované, revidovaná verzia dodaná 20.6.2002)

Krajčí, 1963), obr.1. Do obdobia zavedenia presných elektronických diaľkometerov sa táto metóda vhodnou kombináciou trigonometrických a polygonometrických metód účelne vyhýbala nutnosti priameho merania dĺžok polygonových strán. Z meranej alebo z pripojovacej trigonometrickej strany  $s_{AB}$  (obr. 1) a z uhlov  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  meraných na orientačné body volené pozdĺž polygonového ťahu, sa prvá strana  $s_{B1}$  vypočíta (Michalčák, 1985; Krajčí, 1963) pomocou vzťahu

$$s_{B1} = s_{AB} \frac{\sin \alpha_1 \sin(\alpha_2 + \beta_2)}{\sin(\alpha_1 + \beta_1) \sin \beta_2}. \quad (1)$$

Analogicky sa odvodzujú vzťahy aj pre ostatné strany v ťahu. Pri práci v S-JTSK (dĺžka ťahov okolo 2 km), s priemernou stranou 500 m, je pri aplikácii tejto metódy merania možné očakávať hodnotu relatívnej chyby najslabšie určenej strany pri štandardnej odchýlke meraného uhla  $\pm 3''$  (Krajčí, 1963)

$$\frac{\sigma_d}{d} = 1 : 20\,000 \text{ až } 1 : 15\,000.$$



Obr.1 Durnevov polygonový ťah  
Fig.1 Durnev's traverse

Je prirodzené, že u líniových geodetických štruktúr nástup presných elektrooptických diaľkometerov presunul ťažisko z triangulačných metód určovania súradníc na polygonometrické, čo logicky viedlo k potlačeniu Durnevovej metódy.

Na praktickom príklade chceme demonštrovať, ako zlúčením štruktúry meraní, vychádzajúcej z Durnevovej metódy, moderných geodetických prístrojov a odhadovacích matematicko - štatistických metód, možno výrazne kladne ovplyvniť kvalitu odhadovaných parametrov polygonového ťahu. Pritom nie je nutné striktné dodržiavať štruktúru meraní tejto metódy, ktorá v novom ponímaní predstavuje len návod na zaradenie podporujúcich meraní (z hľadiska efektívneho organizovania terénnych meračských prác predovšetkým smerom) na výrazne signalizované ciele pozdĺž polygonového ťahu (obr.3).

### Matematická formulácia vyrovnania lokálnej polohovej geodetickej siete

Polygonové ťahy sú špecifickým príkladom lokálnych geodetických sietí. Matematická formulácia ich vyrovnania sa zväčša zakladá na definícii sprostredkujúcej veličiny, t.j. veličiny, ktorú je možné vyjadriť z veličín meraných, ako aj z odhadovaných parametrov. Týmto sú v prípade geodetických polohových sietí súradnice bodov, ktorých odhady  $\hat{C}$  sú s meranými veličinami  $L$  vo vzájomných funkčných vzťahoch

$$l+v=f(\hat{C}), \quad (2)$$

ktoré sa s ohľadom na ich nelineárnosť v polohových geodetických sieťach vyjadrujú v tvare

$$v = A d\hat{C} - dl, \quad (3a)$$

$$\Sigma_1 = \sigma_0^2 Q_1. \quad (3b)$$

Vzťah (3a) vyjadruje funkčné a (3b) stochastické vzťahy Gauss – Markovovho odhadovacieho modelu. Vektor  $l$  predstavuje realizáciu náhodnej premennej  $L$ ,  $v$  jeho vektor opráv,  $Q_1$  maticu jeho váhových koeficientov,  $dl=l-l_0$  vektor absolútnych členov, kde  $l_0=f(C^0)$  a  $C^0$  sú približné súradnice. Modelovú maticu lineárneho vzťahu medzi konfiguráciou siete a sprostredkujúcimi veličinami označuje symbol  $A$ . Vzťah pre opravy súradníc  $d\hat{C}$ ; ( $\hat{C} = C^0 + d\hat{C}$ ) sa odvodzuje riešením modelu (3a, 3b) štandardne pri podmienke

$$v^T Q_1^{-1} v = \min. \quad (4)$$

Kvalita odhadnutých súradníc siete, resp. konštrukcia rôznych číselných ukazovateľov presnosti a k-rozmerných konfidenčných oblastí sa určuje z kovariančnej matice geodetickej úlohy

$$\Sigma_C = s_0^2 (A^T Q_1^{-1} A)^{-1} = s_0^2 Q_C, \quad (5)$$

kde  $s_0^2$  je odhad apriórneho variančného faktora  $\sigma_0^2$ .

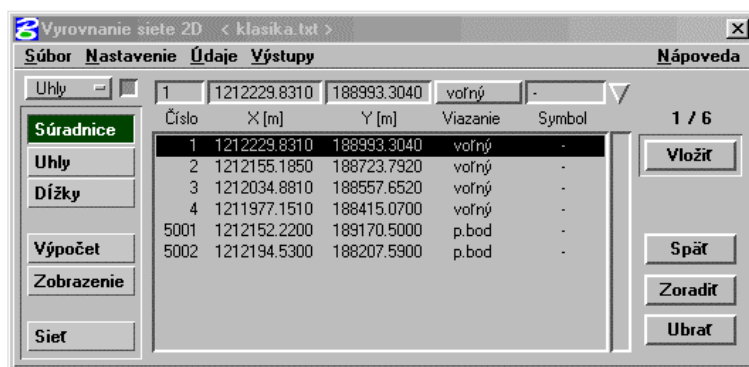
### CAD systémy a riešenie geodetickej úlohy

Je prirodzené očakávať, že vyrovnávacie postupy polygónových ťahov na báze MNŠ budú praxou používané len vtedy, ak riešiteľ nadmieru nezaťažia obtiažnosťou matematického aparátu. Jeho prepísaním do programovacieho jazyka sa s ohľadom na všeobecnú dostupnosť výpočtovej techniky stáva táto otázka bezpredmetnou. Pri voľbe programovacieho jazyka, v ktorom je geodetická úloha riešiteľná, je potrebné uvážiť kvalitatívny stupeň jeho komunikatívosti a nástrojového vybavenia. Dôraz je v geodézii kladený na grafickú interpretáciu výsledkov vyrovnania. Táto súborne sprostredkováva a integruje rad numerických hodnôt viažucich sa k meraniu a spracovaniu geodetickej siete, ako je jej lokalizácia a spôsob fixácie v spracovateľskom priestore, charakteristiky presnosti a spoľahlivosti meraných veličín, či konštrukcia konfidenčných oblastí pre odhadované parametre siete.

Týmto požiadavkám, z pohľadu autorov príspevku, vyhovujú programy CAD (Computer Aided Design - počítačom podporované navrhovanie), ktoré na rozdiel od bežných kresliacich softvérov disponujú mnohými, pre užívateľa osožnými vlastnosťami (Dugáček, D.; Orlitová, 1998).

Do ich kategórie patrí aj *MicroStation*, produkt firmy Bentley – jedno z najrozšírenejších pracovných prostredí medzi užívateľmi z rezortu geodézie a kartografie. Aj toto je jeden z dôvodov, prečo bol program na vyrovnanie polohových geodetických sietí vyvinutý autormi príspevku v jeho internom programovacom jazyku MDL (MicroStation Development Language). Dostal označenie *Vyrovnanie siete 2D* a spolu s ostatnými MDL modulmi tvorí zostavu s názvom *GeoNET*. Obrázok č.2 ukazuje pohľad do programu v režime zadávania približných súradníc. Bližšie informácie o jej vlastnostiach sú zhrnuté v literatúre (Dugáček, D.; Gašinec, J., 2001).

Jeho prostredníctvom možno poslucháčom Katedry geodézie a geofyziky názorne demonštrovať kauzálne vzťahy platiace medzi komponentmi geodetickej siete, čím sa posúva kvalita výučby v predmetoch, ktorých ťažisko spočíva v matematicko – štatistickej interpretácii geodetických meraní, ako sú Spracovanie meraní, Geodetické siete a Deformačné šetrenie.



Obr.2 Vzhľad dialógového okna pre zadávanie súradníc  
Fig.2 Appearance of the fill-in dialog box for coordinates

### Praktická ukážka spracovania polygónového ťahu

Na príklade votknutého polygónového ťahu je demonštrovaný kvalitatívny rozdiel klasického ponímania polygónového ťahu vyrovnaného MNŠ (obr.3, tab.2) a tej istej geodetickej štruktúry, ktorej množina meraných veličín je voľne modifikovaná v zmysle Durneovej metódy (obr.4, tab.3). Azda je vhodné poznamenať, že meranie smerov na výrazne signalizované body nepredlžuje čas terénnych geodetických prác, ak merač efektívne využíva časovú rezervu, ktorá zákonite vzniká pri presune figuranta medzi vzdialenejšími bodmi. Merané dĺžky boli simulované pre  $N(L, (3+3\text{ppm})\text{mm})$  a uhly  $N(L, 7^{\text{cc}})$  v programe Matlab 6. Ich numerické hodnoty udáva tab.1. Všetky obrázky ako i tabuľky boli vytvorené v programe GeoNET 2.6.

Zaradením podporujících smerov poklesla středná súradnicová chyba v sieti zo 4,3 mm na 1,4 mm a středná polohová chyba v sieti zo 6,1 mm na 2,0 mm, čo v obidvoch prípadoch zodpovedá až 67 % zlepšeniu týchto ukazovateľov presnosti.

< DĹŽKY A UHLY > - Merané veličiny							
Označenie	l <sub>mer</sub>	v	v*	l <sup>^</sup>	s(l)	s(l <sup>^</sup> )	r r*
[st-c]	[m]	[mm]	[mm]	[m]	[mm]	[mm]	
5001-1	193.44500	1.935	193.44693	3.580	2.298	0.246	
1-2	279.65200	1.892	279.65389	3.840	2.030	0.488	
2-3	205.12300	1.203	205.12420	3.620	2.197	0.326	
3-4	153.82700	2.195	153.82919	3.460	1.808	0.500	
4-5002	300.49800	2.102	300.50010	3.900	2.201	0.417	
[st-cl-c2]	[g]	[cc]	[g]	[cc]	[cc]		
1-5001-2	156.51840	0.266	156.51843	7.000	4.933	0.091	
2-5003-3	54.03460	-1.490	54.03445	7.000	3.849	0.447	
2-1-5003	123.26870	-1.487	123.26855	7.000	4.515	0.238	
3-2-5003	95.33910	-3.401	95.33876	7.000	4.263	0.321	
3-5003-4	120.06810	-2.262	120.06787	7.000	4.371	0.286	
4-3-5003	47.65300	-3.141	47.65269	7.000	3.526	0.535	
4-5003-5002	228.32210	-3.230	228.32178	7.000	4.895	0.105	

Tab.1 Merané veličiny, ich opravy, vyrovnané hodnoty meraní, štandardná a empirická odchýlka, redundancia  
Fig.1 Observations, residuals, adjusted quantities, standard and deviations, redundancy

< ABSOLÚTNE ŠTANDARDNÉ ELIPSY >				
č.b.	Viazanie	a	b	smerník
		[mm]	[mm]	[g]
1	voIný	4.786	3.407	-90.239
2	voIný	6.253	4.999	44.739
3	voIný	6.472	5.179	45.527
4	voIný	5.768	5.023	92.163

Smerník sa viaže na poloos a

Tab.2 a – hlavná, b – vedľajšia poloos a pootočenie absolútnej štandardnej elipsy

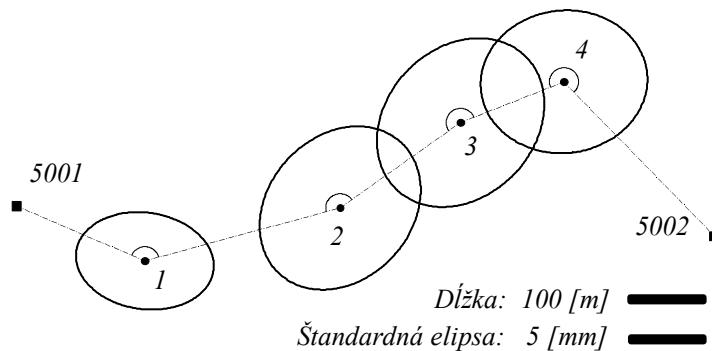
Tab.2 a – semimajor, b – semiminor axis of the standard error ellipse and ellipse rotation

< ABSOLÚTNE ŠTANDARDNÉ ELIPSY >				
č.b.	Viazanie	a	b	smerník
		[mm]	[mm]	[g]
1	voIný	2.338	1.437	-88.743
2	voIný	2.297	1.726	26.573
3	voIný	1.720	1.318	-37.742
4	voIný	2.221	1.180	-58.722

Smerník sa viaže na poloos a

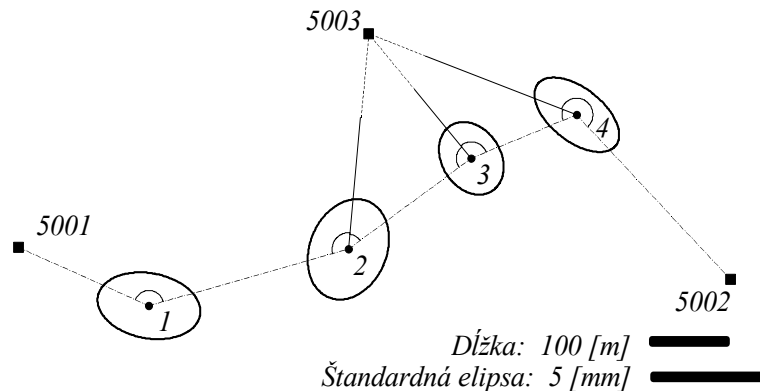
Tab.3 a – hlavná, b – vedľajšia poloos a pootočenie absolútnej štandardnej elipsy

Tab.3 a – semimajor, b – semiminor axis of the standard error ellipse



Obr.3 Votknutý polygónový ťah vyrovnaný MNŠ

Fig. 3 Fixed traverse adjusted by the Method of least squares



Obr.4 Votknutý polygónový ťah modifikovaný Durnevovou metódou

Fig.4 Fixed traverse modified by the Durnev's method

### Záver

Úplný výpočtový program geodetickej úlohy je silným nástrojom zefektívnenia spracovateľského postupu vyrovnania nadbytočných meraní v geodetických sieťach. Je potrebné uvedomiť si postavenie geodeta. Softvér ho nedegraduje na zberateľa dát v teréne a operátora spracovateľského programu, ale naopak, odbremeniť ho od rutinných numerických výpočtov, vytvára mu podklady a priestor, aby s ohľadom na:

- ❑ nové, dokonalejšie fyzikálne modely a matematicko – štatistické postupy spracovania geodetických sietí,
- ❑ jedinečnosť každej geodetickej siete,
- ❑ svoje odborné profesionálne vedomosti a skúsenosti pozdvihol adjustáciu meraní v geodetických sieťach na kvalitatívne vyšší stupeň.

### Literatúra

- BÖHM, J., RADOUCH, V. a HAMPACHER, M.: Teorie chyb a vyrovnávací počet, Geodetický a kartografický podnik, Praha, 1990.
- DUGÁČEK, D. a GAŠINEC, J.: GeoNET – Vyrovnanie siete 2D, Príručka používateľa, Technická univerzita v Košiciach, 2001.
- DUGÁČEK, D. a ORLITOVÁ: CAD a GIS v grafickom prostredí MicroStation. Acta Montanistica Slovaca, Ročník 3 (1998), 1, s. 75 – 84.
- INŠTRUKCIA PRE PRÁCE v polohových bodových poliach (Textová časť), Bratislava, Úrad geodézie, kartografie a katastra Slovenskej republiky, 1994.
- KRAJČÍ, J.: Lokálne geodetické siete. Vydavateľstvo Slovenskej akadémie vied, Bratislava, 1963.
- MICHALČÁK, O., et. al.: Inžinierska geodézia I. Alfa, Bratislava, 1985.
- RATIBORSKÝ, J.: Vyrovnání polygonového pořadu metodou nejmenších čtverců. Geodetický a kartografický obzor. Ročník 40/82 (1994), s. 243 – 248.
- SÜTTI, J., et al.: Analýza kvality polygónových ťahov. Acta Montanistica Slovaca, Ročník 3 (1998), 1, strana 43-50.
- WEISS, G.: Podporené polygónové ťahy. Acta Montanistica Slovaca, Ročník 1 (1996), 1, strana 55 – 64.
- WEISS, G.: Polygónové ťahy z hľadiska ich dátumu. Geodetický a kartografický obzor. Ročník 39/81 (1993), s. 73 – 76.