

Overenie funkčnosti polohových geodetických bodov

Vincent Jakub¹ a Janka Sabová²

A functioning verification 2D geodetic points

2D geodetic points for the geodetic use should be compatible each other. The point compatibility presents the geometric coincidence of the material point of physical mark with the immaterial point given by the point coordinates $C=[XY]$ in a plane system. Before the survey applications of points are made from a certain network area, it is necessary to prove their compatibilities. This demands for the determination of their present coordinates $C'=[X'Y']$ from the contemporary surveying and processing. Then, the coordinate discrepancies $V=C-C'$ can be acquired. Based on V and using convenient analytical procedures a decision on the compatibility of points, i.e. on the possibility of their application can be taken.

The following methods are primarily the most suitable ones for the identification of incompatible points:

- statistic testing of convenient null hypotheses H_0 for V
- robust transformations and adjustments for the identification of points with a high V .

From analyses and application of these methods, it could be revealed their next main properties and utilities:

- the null hypothesis $H_0 : V=0$ (nonsignificant value of V) can be tested e.g. by the Lenzmann-Heck's test (with the transformation), by Bill's test (without the transformation) and by other testings. But testing procedure can not mostly identify two or more incompatible points.
- Robust estimations of type : Least Squares Method with the iterative reweighting facilitates in the proofed area to identify more outliers, i.e. more incompatible points.

Illustrations of both methods is given by demonstrative examples.

Key words: compatibility of 2D geodetic points, coordinate discrepancies (residuals) as indicators, testing hypothesis, robust estimation procedures.

Úvod

Funkčnosť (spôsobilosť, kompatibilitu) polohových geodetických bodov z hľadiska ich použiteľnosti determinujú geometrické vzťahy medzi súradnicami bodu v určitom súradnicovom referenčnom rámci (systéme) a fyzickou značkou bodu. Tieto dve priestorové charakteristiky (v bodovej forme) by pre každý geodetický bod mali byť teoreticky identické. Prakticky majú ale neidentické polohy, medzi ktorými vzniklé metrické rozdiely pre kompatibilné body sú použiteľné len na úrovni presností polohového určenia bodov, t.j. v spodnej mm-ovej oblasti. Keď súradnice a značka bodu spĺňajú túto požiadavku, len vtedy možno hovoriť o funkčnom, kompatibilnom bode.

V polohových bodových poliach, predovšetkým v nelokálnych, vybudovaných a zhŕňovaných najmä v minulosti, vyskytnú sa vždy aj body, ktoré požiadavku kompatibility ich 2 determinujúcich charakteristík nespĺňajú. Takýto stav bodu môže byť vyvolaný napr.: chybným určením súradníc bodu v minulosti, fyzickým posunom bodu (všetky body sú na základnom nosiči – povrchu Zeme, ktorý je v neustálom pohybe), dátumovými vplyvmi i ďalšími okolnosťami. Je preto potrebné pred použitím polohových bodov vhodným spôsobom overiť ich kompatibilitu a použiť len tie z nich, ktoré sú z tohoto hľadiska vyhovujúce.

Základný model overovania kompatibility bodov.

Model predstavuje nasledovnú situáciu bodového poľa v dvoch rozdielnych časoch (epochách).

V minulosti, v epoche t , boli založené a určené body, pre ktoré okrem súradníc $C=[XY]$ v systéme S nie sú k dispozícii žiadne ďalšie údaje. V súčasnosti, epoche t' , je reálne predpokladať, že medzi týmito bodmi, ktoré sa majú použiť na aktuálne geodetické práce, môžu byť niektoré body už nefunkčné, nekompatibilné, t.j. nepoužiteľné a je teda potrebné takéto body identifikovať. K tomu je potrebné príslušné body (tvoriace lokálnu štruktúru) zamerať aj teraz v epoche t' a určiť ich súradnice $C'=[X'Y']$ v systéme S .

Identifikácia nekompatibilných bodov spočíva potom v reálnom posúdení veľkosti súradnicových rozporov (diferencií)

$$V_{Ci} = [V_X \ V_Y]_i = [XY]_i - [X'Y']_i, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (1)$$

¹ host.. doc. Ing. Vincent Jakub, PhD., Geometra, Pražská 4, Košice

² doc. Dr. Ing. Janka Sabová, Ústav geodézie a geografických informačných systémov, TU, 04200 Letná 9, Košice
(Recenzovaná a revidovaná verzia dodaná 29. 4. 2005)

podľa ktorých, ako indikátorov kompatibility bodu, s použitím určitých objektívnych rozhodovacích postupov na základe teórie pravdepodobnosti, teórie rozhodovania a matematickej štatistiky sa body s neprijateľnými (veľkými) hodnotami V_C deklarujú za nekompatibilné, nefunkčné a pre súčasné práce nepoužiteľné.

Na identifikáciu nekompatibilných bodov sa v súčasnosti používajú najmä metódy :

- štatistické testovanie nulových hypotéz o rozporoch V_C ,
- robustné transformačné procedúry na identifikáciu signifikantných hodnôt V_C .

Ich postupy majú okrem realizačných foriem svojich princípov posúdenia kompatibility odlišné aj vnútorné vlastnosti, a teda aj výsledky (najmä konkrétna separácia bodov na kompatibilné a nekompatibilné) nemusia byť vždy identické.

Z tohto dôvodu je v ďalšej časti uvedená podstata oboch metód s poukázaním najmä na možné problémy a neistoty pri ich aplikácii.

Identifikácia nepoužiteľných bodov testovaním súradnicových rozporov

Metóda má rôzne realizačné možnosti, z ktorých je to najmä variant s použitím transformačného postupu a variant bez transformácie.

Prvý variant rieši úlohu v situácii, keď súčasné zameranie a primárne určenie súradníc skúmaných bodov sa vykoná v lokálnom súradnicovom systéme S-LOK, z ktorého sa súradnice C_L transformujú na súradnice C do systému S (obr. 1).

Druhý variant uvažuje so súčasným zameraním skúmaných bodov v epoche t' a s ich spracovaním priamo v systéme S.

Testy na posúdenie kompatibility bodov sú jednak zo skupiny testov na overenie lineárnych hypotéz o parametroch v lineárnych modeloch teórie odhadu, jednak zo skupiny testov pre vybočujúce hodnoty zo súborov (Koch 1988, Kok 1984, Kubáčková 1990 a iní).

Identifikácia nefunkčných bodov s použitím transformácií

V záujmovom priestore je p bodov B_i , $i=1,2,\dots,p$ so známymi (databázovými) súradnicami $C_i = [XY]_i$ zo súradnicového systému S.

Na overenie kompatibility bodov B_i sa medzi nimi vytvorí vhodná sieťová štruktúra ako aj lokálny súradnicový systém S_L (definovaný napr. dvomi bodmi a ich vzdialenosťou, obr. 1). Po kvalitnom zameraní siete a jej spracovaní podľa Gaussovho-Markovovho singulárneho modelu, sa získajú odhady lokálnych súradníc $\hat{C}_{Li} = [\hat{X}_L \hat{Y}_L]_i$ ako aj ostatné potrebné charakteristiky siete.

Súradnice \hat{C}_{Li} sa podobnostnou (Helmertovou) transformáciou, v ktorej všetky body B_i budú tvoriť identické (homologické) body, prevedú na súradnice C'_i v systéme S. Postup transformácie s jednotkovými kofaktorovými maticami pre súradnice má bežné kroky, ktorými sa určia :

- redukované lokálne súradnice C_{Lri} na ťažisko s polohou $C_{Lro} = \sum \hat{C}_{Li} / p$

$$C_{Lri} = \hat{C}_{Li} - C_{Lro} \quad (2)$$

- matica transformácie

$$A (=f(C_{Lr})) = \begin{bmatrix} \vdots & & & & \\ 1 & 0 & \hat{X}_{Li} & -\hat{Y}_{Li} & \\ 0 & 1 & \hat{Y}_{Li} & \hat{X}_{Li} & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}, \quad (3)$$

- transformačné parametre

$$T_p = (A^T A)^{-1} A^T \cdot C, \quad (4)$$

- transformované súradnice bodov B_i zo systému S_L do S

$$C' = A \cdot T_p = A(A^T A)^{-1} A^T \cdot C, \quad (5)$$

- súradnicové rozporov

$$V_{Ci} \therefore [V_X V_Y]_i = \mathbf{C} - \hat{\mathbf{C}}' = [XY]_i - [\hat{\mathbf{X}}' \hat{\mathbf{Y}}']_i, \quad (6)$$

- resp. polohové rozporov na bodoch B_i

$$V_{Bi} = \sqrt{V_{Xi}^2 + V_{Yi}^2}, \quad (7)$$

- ostatné veličiny, napr. aposteriórny variančný faktor $s_0 = \mathbf{V}_C^T \mathbf{V}_C / (2p-4)$ a ďalšie.

Veľkosť rozporov V_C , ako indikátorov kompatibilitnej vlastnosti bodov B_i sa posudzuje na báze štatistického testovania. Nulová, resp. alternatívna hypotéza o V_C sa pre jeden bod (lokalizačný test) formuluje v zmysle

$$H_{0i}: V_{Ci} = \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_{ai}: V_{Ci} \neq 0 \quad (8)$$

a testuje sa H_0 proti H_a . Zvolí sa hladina významnosti testu α pre individuálne testovanie bodov, napr. $\alpha = 0.01$ (Heck 1981, 1985), vhodná testovacia štatistika z príslušnej skupiny testov, napr. test Lenzmannov-Heckov s testovacou štatistikou (Lenzmann 1984, Heck 1985)

$$T_i = \frac{2p - tp - d}{d} \cdot \frac{\Omega_i}{\Omega - \Omega_i} \quad \Xi F(f_1, f_2), \quad (9)$$

kde $tp=4$ je počet transformačných parametrov, $d=2$ je dimenzia bodov, $f_1=d$ a $f_2=2p-tp-d$ sú stupne voľnosti F-rozdelenia. Kvadratická forma rozporov Ω ako aj kvadratická forma bodových rozporov Ω_i pri jednotkových kofaktorových maticiach súradníc je

$$\Omega = \mathbf{V}^T \mathbf{V} = \sum_1^p (V_{Xi}^2 + V_{Yi}^2), \quad (10)$$

$$\Omega_i = \frac{V_i^T V_i}{\frac{p-1}{p} \frac{C_{Lri}^T C_{Lri}}{C_{Lr}^T C_{Lr}}} = \frac{V_{Xi}^2 + V_{Yi}^2}{\frac{p-1}{p} \frac{X_{Lri}^2 + Y_{Lri}^2}{\sum_1^p (X_{Lri}^2 + Y_{Lri}^2)}}. \quad (11)$$

Kritická hodnota $(1-\alpha)$ -kvantil F-rozdelenia

$$F_\alpha = F(\alpha; f_1, f_2) \quad (12)$$

sa pre príslušné argumenty získa zo štatistických tabuliek alebo vhodného softvéru.

Ak pre bod B_i bude

$$T_i < F_\alpha,$$

H_0 na zvolenej hladine významnosti nie je potrebné zamietnuť, porucha kompatibility overovaného bodu vykonaným meraním, spracovaním a analýzou za obdobie $t-t$ nie je preukázateľná. Zistené zmeny (v súradnicovej resp. fyzickej polohe bodu) sú stochastického charakteru a bod je teda so svojimi súradnicami C spôsobilý pre súčasné použitie.

Ak pre bod B bude

$$T_i \geq F_\alpha,$$

H_0 na zvolenej hladine významnosti nie je možné prijať (s rizikom α nesprávneho zamietnutia H_0) a platí H_a ; môžeme teda pripustiť, že v období $t-t$ došlo vo fyzickej polohe bodu, prípadne už pri jeho určení v epoche t k signifikantnej chybe, ktorá spôsobuje jeho nekompatibilitu a preto bod sa pre súčasné použitie nehodí.

Identifikácia nekompatibilných bodov bez transformácií

Ak pole bodov B_i , resp. ich sieťová štruktúra je zameraná a spracovaná v epoche t' (v súčasnosti) v identickom súradnicovom systéme, ktorý bol aj pôvodne v epoche t použitý na určenie bodov B_i , získavajú sa priamo súčasné hodnoty súradníc $\hat{\mathbf{C}}'$ z vyrovnania, bez potreby transformácie (predpokladáme aj v podstate identické dátumy). Tieto súradnice, spolu so súradnicami databázovými C (z epochy t) vytvárajú v zmysle (6), (7) súradnicové rozporov na bodoch B_i , ktorých charakter formulovaný hypotézami (8) je tiež možné posúdiť

vhodnými testami, napr. testom Kochovým a Billovým (Koch 1975, Bill 1984), ktorého testovacia štatistika pre bod B_i je

$$T = \frac{(C_i - \hat{C}_i')^T Q_{C_i}^{-1} (C_i - \hat{C}_i')}{2 \cdot s_0^2} \sim F(2, n - 2p) \quad (13)$$

kde

$$Q_{C_i} = \begin{bmatrix} q_{X'X'} & q_{X'Y'} \\ q_{Y'X'} & q_{Y'Y'} \end{bmatrix}_i \quad (14)$$

je i -tá diagonálna submatica v $2p \times 2p$ matici Q_C kofaktorov súradnicových odhadov z epochy t' , s_0^2 je jednotková aposteriorna variancia a n je počet meraní v sieťovej štruktúre v t' .

Kritická hodnota F-rozdelenia so stupňami voľnosti $f_1 = 2$, $f_2 = n - 2p$ bude

$$F_\alpha = F(\alpha; 2, n - 2p) \quad (15)$$

a z porovnania T_i a F_α vyplynú pre jednotlivé body vzťahy $T_i < F_\alpha$ alebo $T_i \geq F_\alpha$, ktorých významová interpretácia je analogická s následnou časťou článku.

Identifikácia nefunkčných bodov robustným iteračným odhadovaním

K identifikácii nefunkčných bodov (model s transformáciou) je výhodné použiť aj robustné odhadovacie postupy na určenie transformačných parametrov (pre prevod \hat{C}_L na C') a súradnicových rozporov ("opráv súradníc") $V_C = C - C'$ na skúmaných bodoch B_i . Hodnoty V_C ako indikátory kompatibility bodov budú po vhodnej iteračnej procedúre predstavovať nesignifikantné (mm-ové) hodnoty pre kompatibilné body a väčšie i veľké (cm-ové a viac) hodnoty pre nekompatibilné (podozrivé) body. Teda identifikácia nekompatibilných bodov (aj viac bodov súčasne) v robustných odhadovacích postupoch sa vykoná vždy na základe vhodného zohľadnenia veľkosti V_C pre jednotlivé body.

Teória, vlastnosti, použiteľnosť robustného odhadovania parametrov v geodézii a fotogra-metrii je už v značnej miere popísaná a overená, napr. (Huber 1981 a ďalší). Robustné odhadovanie má tú zásadnú vlastnosť v porovnaní napr. s MNS (L2 norma) postupom, že vytvára taký odhadovací mechanizmus, ktorý prakticky nereaguje na prítomnosť hrubých chýb, t.j. na vychýlené (extrémne) hodnoty niektorých prvkov v spracovávanom súbore. V robustnom odhadovacom procese nedôjde k "rozmazávaniu" hrubých chýb (ako je tomu v štandardnej MNS procedúre – Wolf 1975), vychýlené hodnoty zostanú akoby nepovšimnuté v spracovaní a získané odhady nie sú skreslené. Na druhej strane postup preukáže tiež všetky signifikantné vybočenia v skúmaných súboroch veličín V_L, V_C .

Z mnohých druhov a riešení robustných procedúr (Caspary 1988, Carosio 1995, Koch 1996, Somogyi 1988 a iní) a ich praktickej realizácie, najčastejšie sa používa opakovaná MNS odhadovacia procedúra s iteračnou zmenou váh "observácií", keď v j -tom iteračnom kroku sa váhy (kofaktory) určujú ako vhodné funkcie "opráv" V z predchádzajúceho ($j-1$)-tého iteračného kroku v zmysle

$$p^j = \rho(V^{j-1}), \quad (16)$$

pričom za približné (štartovacie) váhy sa použijú jednotkové váhy.

Pre funkcie opráv $\rho(V)$ sú odvodené na teoretickej báze i z empirických skúmaní a overené pre použitie mnohé odporúčané výrazy ako napr.

$$p_i^j = \frac{(V_i^{j-1})^2}{2}, \text{ pre } |V_i| < k \cdot s_i, \text{ (Huber 1981, Carosio 1995)} \quad (17)$$

$$= k \cdot s_i \cdot |V_i^{j-1}| - 0.5 \cdot (k \cdot s_i)^2, \text{ pre } |V_i| \geq k \cdot s_i,$$

kde k sa volí medzi hodnotami 2 a 3 a s_i je štandardná odchýlka i -tej súradnice,

$$p_i^j = \frac{1}{1 + k \cdot (V_i^{j-1})^2}, \text{ (Soha 1987)} \quad (18)$$

kde $k = 3/\sqrt{V_{\lim}^2}$, $V_{\lim} = 3s_0$ pričom s_0 sa vezme z vyrovnania v rámci 1. iteračného kroku,

$$p_i^j = \frac{p_i^{j-1}}{\sqrt{1 + \left(\frac{V_i^{j-1}}{c \cdot s_0^{j-1} \sqrt{p_i^{j-1}}} \right)^2}} \text{ (Benning 1985)} \quad (19)$$

kde : p_i^j je váha i -tej súradnice v j -tom iteračnom kroku,
 V_i^{j-1} je i -tý súradnicový rozpor v $(j-1)$ -tom iteračnom kroku,
 r_i je je čiastkova redundancia i -tého súradnicového rozporu,
 c_0^{j-1} je a posteriori jednotková štandardná odchýlka v $(j-1)$ -tom iteračnom kroku
 $c = 2$ je tlmiaci faktor

ako aj ďalšie váhové funkcie, v ktorých rozpätie hodnôt konštant vyplýva z teoretickej konštrukcie $\rho(V)$ ako aj z empirických skúmaní týchto funkcií v rôznych situáciách.

Do procedúry iteračného MNS odhadu súradníc C' skúmaného bodového poľa teda vstupujú veličiny a osobitné príkazy :

príslušné matice A , C , $P = I$ (štartovacia),
 príkaz na použitie určitej váhovej funkcie (funkcií),
 príkaz pre rozsah iteračného procesu
 a ďalšie.

Po vykonaní všetkých opakovaných vyrovnání, t.j. ukončení iteračného riešenia úlohy sú výsledkom obvyklé výstupné veličiny, z ktorých súradnicové rozpory ("opravy", rezíduá) V_C podľa svojich veľkostí budú indikovať kompatibilitnú situáciu skúmaných bodov. Nekompatibilné body budú zrejme tie, pre ktoré budú príslušné hodnoty V_C významné (v cm-ovej oblasti a vyššie), čo bude zjavné aj vizuálne alebo na základe posúdenia testovaním.

Na overenie reálnosti výsledkov (či sa iteračným odhadom identifikovali všetky nekompatibilné body, či medzi kompatibilnými bodmi nezostali skryté problematické body a pod.), po vyradení identifikovaných chybných bodov zo skúmanej množiny, so zostávajúcimi jej bodmi sa vykonajú ďalšie iteračné určenia V_C až dovtedy, kým sa pre rozpory nezískajú prijateľné, nesignifikantné hodnoty.

Reštrikcie testovacích postupov

Určitými obmedzeniami pri aplikácii testovacích procedúr pri skúmaní predmetnej problematiky, ktoré sú z doterajších skúseností známe, sú predovšetkým nie vždy pravdivé, ako aj významovo jednoznačné výsledky testov.

Jeden z problémov pri použití rôznych druhov testov z hľadiska zamietnutia - nezamietnutia H_0 vzniká evidentne z rôznych konštrukcií a vlastností použitej testovacej veličiny T ako aj z toho vyplývajúceho použitia rôznych druhov rozdelení pravdepodobnosti náhodných veličín $v T$. Tieto skutočnosti sú zjavnou príčinou možných rozdielnych testových hodnotení realizácií skúmanej náhodnej premennej. Preto správna aplikácia testov vyžaduje dobre poznať ich vlastnosti, výhody a nevýhody, resp. všetky obmedzenia a problémy pri ich aplikovateľnosti.

Ďalšou príčinou nereálnych testových výsledkov môže byť "rozmazanie" vysokých hodnôt V_C (neznámych, nekompatibilných bodoch) do hodnôt V_C aj ostatných bodov skúmanej množiny (napr. tab.6), čo je spravidla vyvolané vlastnosťami MNS spracovania bodového poľa. Pritom je možné, že aj vplyvy V_C sa môžu prejavíť nereálnymi hodnotami v príslušných realizáciách T_i štatistiky T . V danom prípade teda test nebude vedieť identifikovať nekompatibilné body.

Problémy pre realitu testových výsledkov, t.j. zamietnutie - nezamietnutie H_0 , môžu vyvolať štatistické testy (testovacie veličiny T) aj tým, že i pri veľkých hodnotách V_{Ci} (netestová indikácia nekompatibilných bodov) vstupujúcich do T_i , budú realizácie T_i redukované na takú mieru, ktorou sa nekompatibilita bodov B nepotvrdí. Teda nie taký bod B_i bude nekompatibilný, ktorý je charakterizovaný veľkým rozporom V_{Ci} , ale taký bod, pre ktorý dostávame veľkú hodnotu testovacej štatistiky $T_i = f(V_{Ci}, \{x_1, \dots, x_n\})$, ktorá je produktom vplyvu okrem V_{Ci} aj celého radu ďalších náhodných a nenáhodných veličín x_1, \dots, x_n pri tvorbe T_i .

Numerická demonštrácia postupov

V určitom priestore sa majú vykonať náročné lokálne geodetické práce, ktoré sa majú viazať a dátumovať na okolitých 8 polohových bodov B_i v S-JTSK, ktoré boli určené v minulosti (epocha t). Ich súradnice $C=[XY]$ sú tab. 1.:

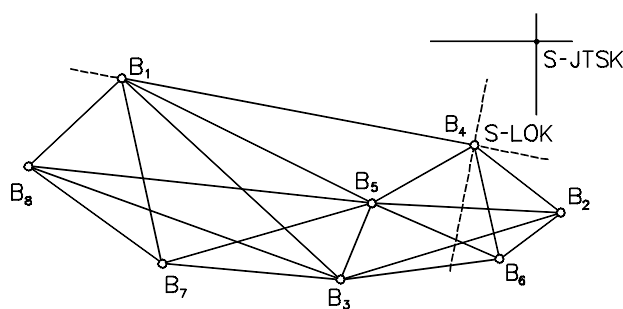
Tab. 1. Súradnice S-JTSK z epochy t
 Tab. 1. S - JTSK coordinates from the epoch t

okrem ktorých nie sú k dispozícii žiadne iné charakteristiky (presnosť, spoľahlivosť,...) zo zamerania a spracovania týchto bodov.

K vyšetrovaniu ich funkčnosti (kompatibility) sa z týchto bodov B_i vytvorila lokálna sieť (obr.1), ktorá sa v súčasnosti (epocha t') zamerala a spracovala:

- jednak v založenom lokálnom súradnicovom systéme S-LOK s použitím regulárneho Gaussov-ho-Markovovho modelu s odhadmi

BOD	X	Y
1	1 239 001,117	264 506,302
2	1 239 502,494	262 798,614
3	1 239 894,221	263 803,978
4	1 239 100,826	263 300,021
5	1 23 9400,509	263 697,868
6	1 239 775,945	263 080,340
7	1 239 842,527	264 393,240
8	1 239 413,382	264 904,553



$\hat{C}_L = [\hat{X}_L \hat{Y}_L]$ (tab.2) a so všetkými potrebnými charakteristikami lokálnej siete,

Obr. 1. Lokálna polohová sieť vytvorená k overeniu kompatibility bodov $B_i, i=1,2,\dots,8$

Fig. 1. D local network for the compatibility identification at the points $B_i, i=1,2,\dots,8$

Tab. 2. Súradnice S - LOK z epochy t'

Tab. 2. S - LOK coordinates from the epoch t'

BOD	\hat{X}_L	\hat{Y}_L
1	2 000,000	3 210,392
2	2 358,992	1 467,214
3	2 832,206	2 436,891
4	1 999,998	1 999,997
5	2 331,437	2 371,809
6	2 654,731	1 725,447
7	2 829,235	3 028,398
8	2 443,675	3 573,316

jednak priamo v existujúcom S-JTSK s použitím singulárneho Gaussovho-Markovovho modelu s odhadmi súradníc $\hat{C}' = [\hat{X}' \hat{Y}']$ tab. 3 a s určením všetkých potrebných ďalších parametrov a charakteristík. Na základe týchto údajov pre danú situáciu overovaných 8 bodov, simuláciou chýb v súradniciach pre niektoré body (pre vznik nekompatibilných bodov), sa vytvorili rôzne umelé stavy bodového poľa

Tab. 3. Súradnice S - JTSK z epochy t'

Tab.3. S - LOK coordinates from the epoch t'

BOD	\hat{X}'	\hat{Y}'
1	1 239 001,11	264 506,3046
2	1 239 502,487	262 798,6143
3	1 239 894,215	263 803,9835
4	1 239 100,827	263 300,0172
5	1 239 400,513	263 697,8708
6	1 239 775,951	263 080,3395
7	1 239,842,534	264 393,2395
8	1 239 413,383	264 904,5465

Zmeny v stave bodového poľa sa vyvolajú zmenami súradníc C niektorých jeho bodov (bolo by možné použiť aj súradnice C_L , ale overuje sa formálne vlastne to, či sú súradnice C všetkých 8 bodov v súčasnosti len stochasticky zmenené voči ich hodnotám C z epochy t .

Stav č.1 bodového poľa :Súradnice bodu č.8 sú zmenené o: $dx = 37$ mm, $dy = -29$ mm, použije sa Lehmannov – Heckov test. Po určení transformačných

parametrov (tp) a súradníc C' získali podľa (6) a (7) hodnoty:

Tab. 4. Súradnicové rozpory na bodoch a realizácie testovacej štatistiky

Tab. 4. Coordinate discrepancies at the points and critical values of the test statistics

BOD	V_X [mm]	V_Y [mm]	V_{XY} [mm]	T_i
1	11,471	-2,685	11,781	1,281
2	-7,510	5,817	9,499	0,853
3	-2,623	0,454	2,662	0,045
4	1,521	-0,467	1,591	0,017
5	4,065	1,068	4,203	0,109
6	4,012	-5,059	6,457	0,315
7	7,633	-10,658	13,109	1,528
8	-18,568	11,529	21,856	22,748

veľkosť ktorých podľa V_X, V_Y, V_{XY} indikuje, že body č.1,7,8 sú, resp. môžu byť podozrivé z nekompatibility. Z hodnôt T_i testovacej štatistiky podľa (9) je však už zrejme, že signifikantne nekompatibilným bodom je len bod č.8, lebo s kritickou hodnotou F_α podľa (12) $F_\alpha = (0.01 ; 2, 16-4-2) = 7.5594$

jedine pre bod č.8 sa H_0 zamietajú, teda tento bod je možné považovať za nefunkčný a pre geodetické práce nepoužiteľný.

Po vyradení bodu č.8 ako nekompatibilného bodu, vykonala sa so zvyšnými 7 bodmi analogická testovacia procedúra, z ktorej na základe hodnôt a z nich určených T_i pre body č.1-7 podľa (9) vyplýva $\forall T_i < F_\alpha$,

teda H_0 u žiadneho zo 7 bodov nezamietame, týchto 7 bodov je možné už považovať za kompatibilné, funkčné body, použiteľné so svojimi súradnicami C' alebo aj C (tab.1) z epochy t .

Stav č. 2 bodového poľa: Súradnice bodu č. 2 a 8 sa zmenia o: č.2: $dx = 37$ mm, $dy = -29$ mm, č. 8 : $dx = -31$ mm, $dy = 38$ mm, použije sa test Lehmannov-Heckov a test Kochov - Billow.

Použitie Lehmannovho – Heckovho testu :

Z určenia transformačných parametrov a transformovaných súradníc C' vyplynuli podľa (6) a (7) hodnoty :

BOD	V _X [mm]	V _Y [mm]	V _{XY} [mm]
1	0.524	-0.249	0.580
2	-4.322	3.234	5.398
3	-4.361	5.514	7.030
4	-0.699	-3.314	3.387
5	0.611	2.234	2.316
6	6.629	-4.383	7.947
7	1.618	-3.037	3.441

Tab. 5. Súradnicové rozpory na bodochpo vyradení nekompatibilného bodu
 Tab. 5. Coordinate discrepancies at the points after rejection of uncompatible points

Tab. 6. Súradnicové rozpory na bodoch a realizácie testovacej štatistiky T
 Tab. 6. Coordinate discrepancies at the points and critical values of the test statistics

BOD	V _X [mm]	V _Y [mm]	V _{XY} [mm]	T _i
1	-19.878	7.097	21.107	0.972
2	-24.868	16.113	29.632	2.722
3	3.092	14.306	14.636	0.359
4	0.229	-16.655	16.657	0.511
5	0.652	1.089	1.269	0.002
6	23.586	-10.878	25.974	1.566
7	-1.404	15.812	15.874	0.466
8	18.591	-26.884	32.686	4.188

Tieto naznačujú, že MNŠ určenie transformačných parametrov z bodovej množiny obsahujúcej aj viac nekompatibilných bodov (č.2,8) je nepoužiteľné, lebo očakávateľné veľké hodnoty V_X, V_Y pre body č.2,8 nie sú len u týchto bodov ale aj u ďalších (č.1,6) a teda V_X, V_Y indikujú svojou veľkosťou aj pre tieto body nekompatibilitu ale nereálne. V prípadoch 2 a viac nekompatibilných bodov, teda MNŠ procedúra nevytvára objektívne hodnoty rozporov na skúmaných bodoch.

Túto skreslenú situáciu preukazujú aj podľa (9) určené realizácie testovacej štatistiky T a vzhľadom k

$$F_{\alpha} = F(0.01; 2, 16-4-2) = 7.5594$$

aj pochybné testové výsledky: H₀ sa pre žiadny z 8 bodov nezamieta, všetky body sú kompatibilné vrátane bodov č.2,8, čo nedáva pravdivý obraz o skúmaných bodoch z hľadiska ich kvality a funkčnosti.

Použitie **Kochovho – Billovho** testu.: Zo zamerania a spracovania sieťovej štruktúry 8 skúmaných bodov v S-JTSK sú k dispozícii potrebné veličiny pre testovanie: n=19, u=2p=16, kofaktorová matica Q_{ca} vektora súradníc Ĉ (neuvedená) zo súčasného určenia bodov, aposteriorna jednotková variancia s₀² = 0.00001191.

Test sa použil ako lokalizačný pre každý bod osobitne. Súradnicové rozpory na bodoch podľa (6),(7) sú

Tab. 7. Súradnicové rozpory na bodoch a realizácie testovacej štatistiky T
 Tab. 7. Coordinate discrepancies at the points from two robust adjustments

BOD	V _X [mm]	V _Y [mm]	V _{XY} [mm]	T _i
1	6,10	-2,60	6,539	0,786
2	44,00	-29,30	52,863	141,089
3	6,00	-5,50	8,139	1,349
4	-1,00	3,81	3,929	0,427
5	-4,01	-2,82	4,883	0,474
6	-6,01	0,50	6,021	1,299
7	-7,04	0,51	7,018	1,227
8	-32,01	44,52	54,811	59,493

a naznačujú, že najväčšie hodnoty rozporov prislúchajú nekompatibilným bodom č.2,8 a tento obraz sa ukazuje aj v realizačných hodnotách T_i testovacej štatistiky (13). Kritická hodnota F-rozdelenia pre α = 0.01 a stupne voľnosti f₁=2, f₂= n - 2p=3 v zmysle (15) je F_α = (0.01; 2,3) = 30.8165,

takže z porovnania T_i a F_α vyplýva jednoznačná silná indikácia nekompatibility oboch bodov č.2,8 a schopnosť Kochovho - Billovho testu súčasne preukázať nefunkčnosť aj viacerých bodov zo skúmanej množiny.

Použitie **robustného** spracovania rozporov:

Na určenie transformačných parametrov s použitím skúmaných 8 bodov sa použili redukované lokálne súradnice C_{Lr} ako aj súradnice C tab. 1., zmenené pre body č. 2,8 o hodnoty uvedené pre stav č. 2 bodového poľa. Z procesného hľadiska v riešení bola použitá Newtonova iterácia s váhovou funkciou (18) a s j=11 krokmi. Z výpočtu vyplynuli súradnicové rozpory:

Vyplyvajú z nich zjavné významné hodnoty pre body č.2,8 vzhľadom k hodnotám pre ostatné body, čo signalizuje ich významnú nekompatibilitu, t.j. nefunkčnosť oboch bodov, ktoré s použitím vhodnej váhovej funkcie a potrebného rozsahu iterácií sa môžu jednoznačne identifikovať aj pri použití iných váhových funkcií.

Tab. 8. Súradnicové rozpory na bodoch z dvoch robustných vyrovnaní

Tab. 8. Coordinate discrepancies at the points from two robust adjustments

BOD	Vyrovnanie s 8 bodmi			Vyrovnanie so 6 bodmi			
	V_x [mm]	V_y [mm]	V_{xy} [mm]		V_x [mm]	V_y [mm]	V_{xy} [mm]
1	-0,074	0,310	0,319	1	0,886	0,059	0,888
2	-41,059	34,427	53,583	3	-6,053	6,687	9,020
3	-5,117	7,242	8,867	4	-1,151	-0,776	1,388
4	-0,5	-1,784	1,853	5	-0,202	3,864	3,870
5	0,3	3,684	3,697	6	4,785	-1,779	5,106
6	6,484	-2,202	6,848	7	0,330	-2,952	2,971
7	0,475	-1,86	1,848				
8	36,612	-47,691	60,24				

Oba body sa z bodovej množiny vyradili a pre zostávajúcich 6 bodov sa realizoval analogický odhadovací proces s váhovou iteráciou, z ktorého vyplynuli súradnicové rozpory na skúmaných 6 bodoch. Vzniklé rozpory stochastického charakteru naznačujú, že zostávajúcich 6 bodov je možné považovať za kompatibilné body a použiteľné aj v súčasnosti.

Záver

Z doterajších možností objektívneho vyšetrenia funkčnosti (použitelnosti) polohových bodov vyplýva, že jednotlivé testovacie nástroje majú určité obmedzenia najmä v určení súradnicových rozporov skúmaných bodov a z toho plynúce odlišné hodnotenia aj ich kompatibility. Také situácie vznikajú najmä pri viacerých nekompatibilných bodoch v skúmanej množine. Odporúčané algoritmy na identifikáciu týchto bodov spočívajú na rozčlenení bodového poľa a skúmaní každej časti osobitne čo predstavuje zdĺhavé, ťažkopádne riešenia tiež bez záruky jednoznačnosti. Najvhodnejšími prostriedkami na vyšetrenie funkčnej spôsobilosti bodov sa javia rôzne robustné odhadovacie procedúry pri určení ich súradnicových rozporov, z ktorých na základe vychýlených V_C (s testovaním alebo aj bez) sa nevhodné body v skúmanej skupine spoľahlivo určia.

Literatúra – References

- Benning, W.: Test von Ausreißern bei der Helmerttransformation. *Zeitschr.f. Vermessungswesen*, 110,5, 207-209, 1985.
- Bill, R.: Eine Strategie zur Ausgleichung and Analyse von Verdichtungsnetzen. *Veröff.d.Deutschen Geodät. Komm. R.C, H.295, München 1984.*
- Carosio, A.: Ausgleichung geodätischer Netze mit Verfahren der robusten Statistik. *Vermessung, Photogrammetrie & Kulturtechnik*, 4,188-191, 1995.
- Caspary, W.: Fehlerverteilungen, Methode der kleinsten Quadrate und robuste Alternativen. *Zeitschr.f. Vermessungswesen*, 113,3,123-133, 1988.
- Heck, B.: Der Einfluss einzelner Beobachtungen auf das Ergebnis einer Ausgleichung und die Suche nach Ausreißern in der Beobachtungen. *Allgem. Verm. Nachrichten*, 88,1,17-34, 1981.
- Heck, B.: Ein- und zweidimensionale Ausreissertests bei der ebenen Helmert-Transformation. *Zeitschr.f. Vermessungswesen*, 110,10,461-471, 1985.
- Huber, P.: Robust statistics. *J.Wiley & Sons, New York 1981.*
- Jakub, V.: Posudzovanie stability geodetických bodov. *PhD dizertácia 2001, F BERG, TU Košice.*
- Koch, K. R.: Test von Ausreißern in Beobachtungspaaren. *Zeitschr.f. Vermessungswesen*, 110,1,34-38, 1985.
- Koch, K. R.: Ein allgemeiner Hypothesentest für Ausgleichungsergebnisse. *Allgem. Verm. Nachrichten*, 82,10,339-345, 1975.
- Koch, K. R.: Robuste Parameterschätzung. *Allgem. Verm. Nachrichten* 103, 1-18 1996.
- Kubáčková, L.: Metódy spracovania experimentálnych údajov. Veda 1990, Bratislava.
- Lenzmann, L.: Zur Aufdeckung von Ausreißern bei überbestimmten Koordi-natentransformation. *Zeitschr.f. Vermessungswesen*, 9,474-479 1984.
- Pope, A. J.: The statistics of residuals and the detection of outliers. *NOAA Technical Report NOS 65 NGS 1, U.S.Dept. Com., National Geodetic Survey, Rockville,Md 1976.*
- Soha, G.: Robusztus kiegyenlítés mérési javítástól függő súlyozással. *Geodézia és kartográfia*, 267-271, 1987.
- Somogyi, J.: Robust estimation and their use in geodesy. *Acta Geodaet. Geoph. Mont. Acad.Sci.Hung.* 23, 45-53, 1988.
- Sütti, J., Jakub, V., Sabová, J.: Skúmanie polohovej identity geodetických bodov. *Acta Montanistica Slovaca* 5, 2,121-129,2000.
- Wolf, H.: Ausgleichsrechnung (Formeln und praktische Anwendung). Dümmler, Bonn 1975.