Analýza tvaru klenby kostola zameranej laserovým prístrojom LEICA TCR 305

Ľudovít Kovanič, jr. [1]***, Ľudovít Kovanič*** [2]***, Jozef Sokol*** [3]

Analysis of the form vault temple bearing by the laser apparatus LEICA TCR 305

As an object of mapping we choosed some of churches as an object of mapping. Ve determined the aisle of Rozalia church in Košice by means using the apparatus Leica TCR 305. The oblique transverse profile was measured. Making use horizontal and vertical lenght components we selected those that defined the beggining, course and the end of the oblique ceilling arch. On the basis of five paired data into a rectangular coordinate system of the vertical plane with the begining in the point of arch origin. The coordinate x_i *defined the stationing and the coordinate* y_i *defined the height, resp. the superelevation from the apparatus horizont to the arch points securing that the whole course of the arch is retained regularly. First we considered the possibility of circle. The aisle of Rozalia church in Košice. We determined different radiuses using connecting lines of selected points (cords), however it is not important, for the arch. Therefore we considered the solution of the arch shape through a parabola.*

The comparison of results was realized by the mathematic-statistical methods. Parameters of regression were calculated by the method of least squares .We tried to analyze the curve of this arch using also the method of mathematically defined second grade, curves , namely circles and elipses.

Key words: *Object measurement, church, oblique profiles, coordinate system, parabola.*

Úvod

Náplň príspevku vychádza z veľmi rozsiahlych praktických meraní na overenie funkčnosti merania dĺžok prístrojom LEICA TCR 305 na báze pasívneho odrazu od rôznych materiálov, ich polohy a tvaru. Zamerané boli rôzne objekty a z výsledkov bola preukázaná vysoká presnosť takéhoto spôsobu merania. Jedným z objektov bola aj klenba kostola Sv. Rozálie v Košiciach. Jej tvar sme analyzovali pomocou matematicky definovaných kriviek druhého stupňa.

Už po vynesení výsledkov merania do grafu tvar krivky profilu klenby kostola na prvý pohľad pripomínal kružnicu, a tak sme pristúpili k analýze tejto krivky s doplnením aj polparaboly a polelipsy. Tieto výsledky sú dokumentované už len graficky, pretože číselné vyhodnotenie by rozsah príspevku podstatne rozšírilo.

Vychádzajúc z dosiahnuteľnej vysokej presnosti meraných parametrov polárnych súradníc prístrojom Leica TCR 305 na báze pasívneho odrazu laserového žiarenia je možné do vzdialenosti asi 30-40 m určiť body detailu zameriavaných objektov s presnosťou do ± 5 mm. Týmto prístrojom sme zamerali priečny profil kostola Rozália v Košiciach s využitím automatickej registrácie výsledkov merania. S krokom zenitového uhla 5 gon a príslušných dĺžok sme určili aj tvar jeho oblúkovej klenby (Obr. 1).

Pri analýze tvaru tohto oblúka sme skúmali najskôr, či je to kružnica. Pomocou spojníc vhodne zvolených bodov na tejto krivke (tetív) boli zistené rôzne veľkosti polomerov jej krivosti, i keď s neveľkými rozdielmi, a tak sme pristúpili k riešeniu tvaru oblúka podrobnejšie.

Parabola

Prioritne sme pre tvar klenby zvolili parabolu (Floreková, Benková, 1999). Z vodorovných a zvislých zložiek dĺžok sme vybrali tie, ktorými bol definovaný začiatok, priebeh, vrchol a koniec oblúkovej klenby stropu. Z údajov piatich bodov usporiadaných do pravouhlého súradnicového systému zvislej roviny s počiatkom v bode začiatku oblúka súradnica x_i určovala staničenie a y_i výšku resp. prevýšenie k bodu oblúka od horizontu prístroja tak, aby bol nimi rovnomerne pokrytý celý priebeh oblúkovej klenby. Tieto údaje sú v tabuľke 1.

Na objektívne porovnanie výsledkov merania sme aplikovali matematicko-štatistické hodnotenie. Na výpočet parametrov regresnej funkcie bola použitá metóda najmenších štvorcov a za regresnú funkciu zvolená parabola v tvare

$$Y_i = a + b.x_i + c.x_i^2 , \qquad (1)$$

[1] *Ing. Ľudovít Kovanič, PhD.,* Stredná priemyselná škola stavebná a geodetická, Lermontovova 1, 04001 Košice, kovanic@pobox.sk
[2] *doc.Ing. Ľudovít Kovanič, CSc.,* Ústav geodézie a GIS F BERG TU v Košiciach, Park Komenského 19, ludovit. kovanic@tuke.sk
[3] *Ing. Jozef Sokol,* Ústav geodézie a GIS, F BERG, TU v Košiciach, Park Komenského 19.
(Recenzovaná a revidovaná verzia dodaná 16. 5. 2007)

kde a, b, c - sú parametre regresnej paraboly, ktoré treba určiť,
x_i - hodnoty staničenia,
Y_i - teoretické hodnoty výšok jednotlivých bodov klenby,
y_i - namerané hodnoty výšok jednotlivých bodov klenby.

Podmienkou metódy najmenších štvorcov je, aby súčet $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$ druhých mocnín rezíduí

$$(Y_i - y_i)^2 = \min., \text{ t.j.} \qquad S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - y_i)^2 = \min. \tag{2}$$

Ak má byť táto podmienka splnená, potom prvé parciálne derivácie uvedeného súčtu podľa neznámych a, b, c, sa musia rovnať nule, teda:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0.$$

Úpravou týchto rovníc po derivácií dostaneme sústavu normálnych rovníc pre vektor neznámych parametrov $p^T = [a \quad b \quad c]$,

$$p = \left(X^T X\right)^{-1}\left(X^T y\right), \tag{3}$$

kde dátová matica $\underset{n\,x\,3}{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix}$, dátový vektor $\underset{n\,x\,1}{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Tab. 1. Dátová matica a vektor pre výpočet regresnej krivky profilu klenby.
Tab. 1. Data matrix and vector for analysis if regression curve of arch profile.

i	x_i [m]	x_i^2
1	0,0	0,0
1	1,296	1,679 616
1	4,352	18,939 904
1	7,435	55,279 225
1	8,893	79,085 449

y_i [m]
4,721
7,376
8,777
7,443
4,626

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1{,}296 & 1{,}679616 \\ 1 & 4{,}352 & 18{,}939904 \\ 1 & 7{,}435 & 55{,}279225 \\ 1 & 8{,}893 & 79{,}085449 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 4{,}721 \\ 7{,}376 \\ 8{,}777 \\ 7{,}443 \\ 4{,}626 \end{pmatrix}$$

$$X^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1{,}296 & 4{,}352 & 7{,}435 & 8{,}893 \\ 0 & 1{,}679616 & 18{,}939904 & 55{,}279225 & 79{,}085449 \end{pmatrix}$$

$$X^T X = \begin{pmatrix} 5{,}000000 & 21{,}976000 & 154{,}984194 \\ 21{,}976000 & 154{,}984194 & 1198{,}911180 \\ 154{,}984194 & 1198{,}911180 & 9671{,}842034 \end{pmatrix}$$

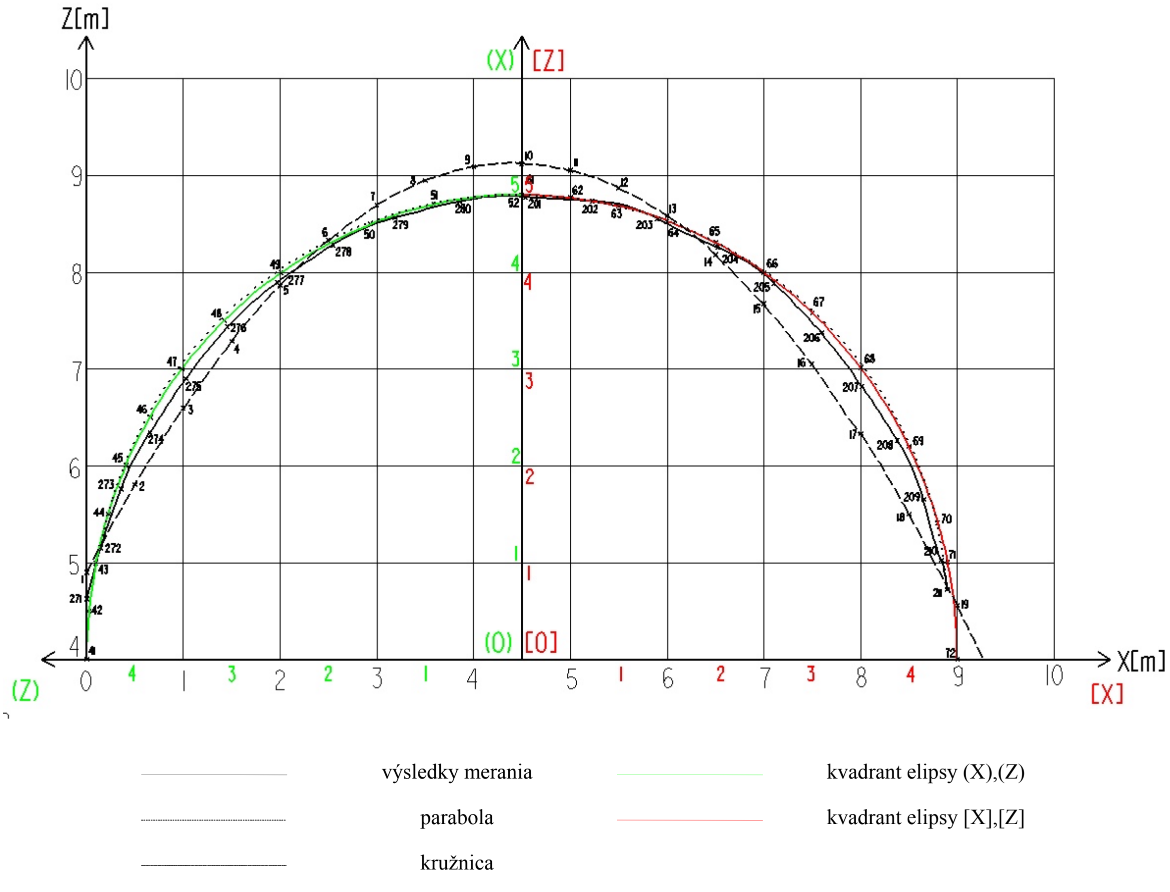
$$\left(X^T X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}759536 & -0{,}329689 & 0{,}028697 \\ -0{,}329689 & 0{,}300131 & -0{,}031921 \\ 0{,}028697 & -0{,}031921 & 0{,}003600 \end{pmatrix}$$

$$X^T y = \begin{pmatrix} 32{,}943000 \\ 144{,}234523 \\ 955{,}916944 \end{pmatrix} \qquad p = \begin{pmatrix} 4{,}901 \\ 1{,}915 \\ -0{,}217 \end{pmatrix}$$

Potom hľadaná rovnica závislosti má tvar

$$Y_i = 4{,}901 + 1{,}915\, x_i - 0{,}217\, x_i^2 = Z_i \tag{4}$$

platný aj pre súradnicový systém X, Z vo zvislej rovine.



Obr. 1. Klenba kostola sv. Rozálie v Košiciach.
Fig. 1. The arch of church of St. Rozalia in Košice.

Na zobrazenie klenby sme zvolili súradnicový systém s počiatkom *0* v úrovni výšky horizontu prístroja tak, aby os *Z* prechádzala začiatočným bodom klenby (obr. 1).

Výsledky priameho merania profilu sú zobrazené plnou čiarou a vypočítaným hodnotám detailných bodov podľa vzťahu (4) odpovedá parabola vyznačená čiarkovane. Takto definovaná parabola nevystihuje s vyhovujúcou presnosťou krivku klenby, keď vo vrchole má vzhľadom ku krivke klenby prevýšenie $\Delta z \doteq 320\ mm$ a po oboch stranách je jej tvar štíhlejší. Z rozdielnosti plošných obsahov vymedzených oboma krivkami po oboch stranách vyplýva, že klenba je vzhľadom k zvislej osovej rovine asymetrická.

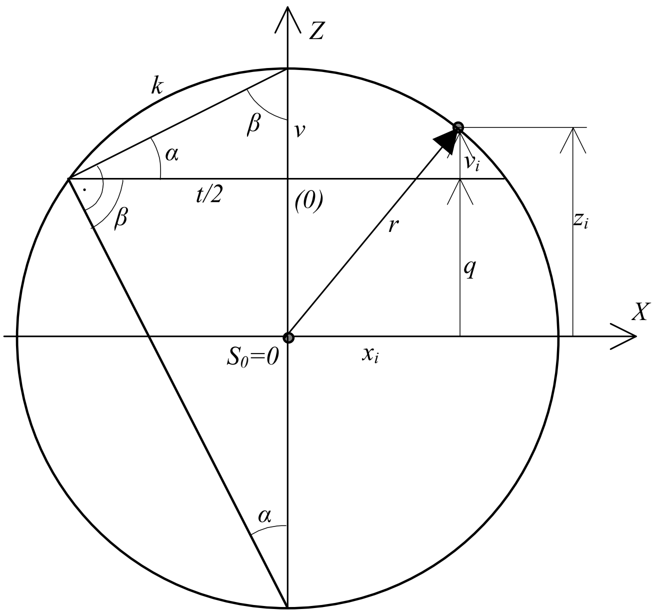
O analýzu tvaru krivky tejto klenby sme sa pokúsil aj pomocou ďalších matematicky definovaných kriviek druhého stupňa, najmä kružnice a elipsy.

Kružnica

Pri kružnici vychádzajúc z dĺžky tetivy *t* a výšky – vzopätia – oblúka *v* (Obr. 2), na stanovenie jej polomeru a stredu platí

$$\alpha = arctg\frac{2v}{t}, \qquad \beta = 100 - \alpha, \qquad k = \sqrt{\left(\frac{t}{2}\right)^2 + v^2},$$

$$r = \frac{k}{2.\sin\alpha}, \qquad q = r - v. \tag{5}$$



Pre z–ovú súradnicu bodov kružnice platí $z_i = \sqrt{r^2 - x_i^2}$, z čoho pre vynášanie súradníc z_i od tetivy s počiatkom v bode (O) vyplývajú hodnoty $v_i = z_i - q$. Pre porovnanie krivky z nameraných hodnôt a kružnice prechádzajúcej bodmi začiatku, vrcholu a konca klenby vyznačenej bodkovane je kružnica tiež znázornená na obr.1. Keďže kružnica prechádza v oboch kvadrantoch z vonkajších strán krivky klenby, analyzovali sme aj ďalšie krivky druhého stupňa.

Obr. 2. Schéma pre výpočet parametrov kružnice.
Fig. 2. Scheme for calculation of circle parameters.

Elipsa

Aproximáciu klenby sme riešili aj pomocou elipsy danej kanonickým tvarom rovnice, ak sú súradnicové osi totožné s osami elipsy s počiatkom v jej strede. Tá je daná vzťahom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \tag{6}$$

Pri tomto riešení je veľmi dôležitá správna voľba dĺžok polosí – dlhšej (hlavnej) *a* a kratšej *b*. Jednoduchšie je to pri stanovení dĺžky 2*b;* t.j. vzdialenosti dvoch rovnobežiek s osou *Z,* ku ktorým sa krivka asymptoticky dostane na začiatku a na konci oblúka. Z výsledkov merania bola stanovená hodnota *b = 4,500 m*. Pre voľbu dĺžky hlavnej polosi *a* bolo vykonaných niekoľko výpočtov. Ak bola vzhľadom k optimálnej dĺžke kratšia, priebeh elipsy bol z vonkajšej strany krivky klenby; ak však bola jej hodnota väčšia, elipsa bola štíhlejšia a prebiehala z vnútornej strany krivky klenby. Prijateľné bolo riešenie pri *a = 4,800 m* v dvoch súradnicových systémoch s počiatkom v bode *(0),* resp. *[0]* v úrovni *z = 4,000 m*.

[1] V súradnicovom systéme *(X), (Z)* pri zvolených hodnotách x_i pre *z*-ovú súradnicu vyplýva

$$z_i = \frac{\sqrt{a^2.b^2 - x_i^2.b^2}}{a}. \tag{7}$$

Transformáciou vypočítaných súradníc do systému (*X),(Z)* je na obr.1 zelenou farbou zobrazený ľavý kvadrant elipsy. Jeho otočením o uhol *π* okolo osi symetrie rovnobežnej s osou *Z* možno získať oba jej kvadranty. To však z dôvodu prehustenia kriviek na obrázku neuvádzame.

[2] V súradnicovom systéme [X],[Z] pri volených hodnotách x_i pre z–ovú súradnicu jednotlivých bodov elipsy analogicky z rovnice elipsy vyplýva

$$z_i = \frac{\sqrt{a^2.b^2 - x_i^2.a^2}}{b}. \qquad (8)$$

Podobne ich transformáciou do toho istého systému súradníc dostaneme pravý kvadrant elipsy zobrazený červenou farbou. Ani zákres pomocou otáčania z tých istých dôvodov neuvádzame. Ako vyplýva z vypočítaných hodnôt aj z obr. 1 toto riešenie najlepšie vystihuje priebeh krivky oblúka klenby.

Rovnako sme zamerali aj zvislý priečny profil lode kostola Kalvária v Košiciach. Trojloďový kostol ako kultúrna pamiatka má štítovo-rebrovité členenie klenby s malým vzopätím lomených oblúkov, pretože európskou a azda aj svetovou unikátnosťou je tým, že v rámci pôdorysu je na poschodí druhý trojloďový priestor kostola.

Záver

Laserovým prístrojom Leica TCR 305 možno na báze pasívneho odrazu svetelného žiarenia s vysokou presnosťou merať interiéry aj rozľahlých historických stavieb i pamiatkovo chránených objektov pre ich dokumentáciu, ale ich tvary možno definovať aj matematicky. Záverom môžme konštatovať, že uvedeným prístrojom je možné s vysokou presnosťou zameriavať interiéry aj rozľahlých stavieb a iných pamiatkovo chránených objektov pre ich zdokumentovanie. Toto bolo naším dominantným cieľom.

Literatúra - References

[1] Floreková, Ľ., Benková, M.:Štatistické metódy, *FFP – F BERG TU v Košiciach, 1999, ISBN 80-7099-411-8*

[2] Kovanič, Ľ., jr. a kol.: Riešenie niektorých úloh laserovými dĺžkomermi na báze pasívneho odrazu. In: Sborník vědeckých prací VŠB TU Ostrava, *Řada hornicko-geologická, ročník L, č. 2/2004, s. 27 – 31.*