

Vplyvy chybných meraní na spracovanie 2D lokálnych geodetických sietí

Gabriel Weiss, Štefan Rákay, ml., Slavomír Labant a Lucia Kalatovičová¹

Influence of bad measurements in establishment of 2D Local Geodetic Network

The quality of Local Geodetic Network (LGN) for technical and scientific purposes is very important from many points of view. These nets require compatible points (given and new ones), measurements among points without blunders and reliable determination of approximate coordinates for the new (to be established) points. If some from the 3 mentioned requirements is not fulfilled for the network computation, the various results from the net adjustments are defective and unusable. In the present treatise, all requirements for faultless measurements are introduced and demonstrated in adjustments of a trilateral net using the standard, constrained adjustment (GMM of full rank with minimum constraints) and the interactively reweighed Least-Square Robust Adjustment. From analyses of their solutions can be by convenient introduced methods determined and identify all errors in the net measurements.

Key words: Local Geodetic Network, Method of least squares, robust adjustment, weight iteration adjustment

Úvod

Kvalita každej lokálnej geodetickej siete (LGS) pre technické a vedecké účely je dôležitá z rôznych hľadísk. Zakladané LGS vyžadujú kompatibilné body (jestvujúce aj nové), zameranie veličín medzi bodmi bez hrubých chýb a spoľahlivé určenie približných súradníc nových bodov. Keď z uvedených 3 požiadaviek nie je splnená ktorákoľvek v spracovaní LGS, rôzne výsledky z vyrovnania sú skreslené a nepoužiteľné. V práci sú požiadavky kvalitných meraní prezentované v rámci spracovania trilateračnej siete: štandardným väzbovým MNSŠ vyrovnaním a iteratívne váhovaným robustným MNSŠ vyrovnaním, z analýz výsledkov, ktorých vyplývajú vhodné postupy pre identifikáciu chýb v zameraní LGS.

1. Detekcia rušiacich vplyvov v spracovaní LGS

V matematickom spracovaní dvojrozmerných LGS, t.j. v ich vyrovnaniach môžu pôsobiť chyby 3 druhov:

- chyby v nameraných hodnotách veličín L v sieti, t.j. dĺžok, smerov a uhlov a iných, ktoré vytvárajú rozmery a štruktúru LGS a determinujú polohy bodov LGS. Tieto chyby ovplyvnia (znehodnotia) všetky výsledné parametre vyrovnania, t.j. vektora rezíduí V (bude obsahovať vychýlené V_i chybných observácií L_i), odhady súradníc $(\hat{X}\hat{Y})_{UB}$, ich štandardné odchýlky $(s_{\hat{X}\hat{Y}})_{UB}$, kvadratickú formu rezíduí kfV , aposteriórny variačný faktor s_0^2 a ďalšie,
- chyby v súradniciach tých bodov, ktoré sú deklarované a použité za dátumové body (DB) na väzbu LGS v určitom súradnicovom systéme a ktoré chyby charakterizujú porušenú kompatibilitu DB (neidentita) súradnicovej polohy bodu a jeho značkovej (fyzickej) polohy (Stichler, 1985, Weiss et al., 1997, 2006). Chybné hodnoty $(XY)_{DB}$ súradníc dátumových bodov, ktoré nie sú kompatibilné so svojimi meračskými (fyzickými) značkami vyvolávajú vo výstupných veličinách: vo vektore rezíduí V aj väčší počet vychýlených hodnôt, neprijateľne veľké, vychýlené štandardné odchýlky $(s_{\hat{X}\hat{Y}})_{UB}$, nereálne veľkú hodnotu kvadratickej formy opráv kfV ako aj aposteriórnej jednotkovej variancie meraní s_0^2 i ďalšie problémové výsledky,
- chyby v určených približných súradniciach $(X^0Y^0)_{UB}$ nových určovaných bodov (UB) v LGS v dôsledku omylov a vadných meraní alebo aj výpočtov. Chybné hodnoty $(X^0Y^0)_{UB}$ niektorého (niektorých) UB neovplyvnia síce spravidla hodnoty veličín V , kfV , s_0^2 a $(s_{\hat{X}\hat{Y}})_{UB}$ ale len niektoré výsledné súradnice $(\hat{X}\hat{Y})_{UB}$ určovaných UB, ktoré budú vadné, čo je ovšem tiež neprijateľné pre tvorbu LGS.

¹ prof. Ing., Gabriel Weiss, PhD., Ing. Štefan Rákay ml., Ing. Slavomír Labant, Ing. Lucia Kalatovičová, Fakulta BERG Technickej univerzity v Košiciach, Ústav geodézie, kartografie a geografických informačných systémov, Park Komenského 19, 040 01 Košice, Gabriel.Weiss@tuke.sk, Stefan.Rakay@tuke.sk, Slavomir.Labant@tuke.sk, Lucia.Kalatovicova@tuke.sk (Recenzovaná a revidovaná verzia dodaná 18. 11. 2008)

Tieto chyby v rámci vyrovnania LGS sa prejavujú v rôznych priebežných a finálnych veličinách vyrovnania, najmä v rezíduách V a teda aj v ich kvadratickej forme kfV , v odhadoch určených súradníc $(\hat{X}\hat{Y})_{UB}$, v aposteriórnej (empirickej) jednotkovej variancii s_0^2 a v ďalších výstupných produktoch z vyrovnania. Hodnoty uvedených veličín budú predovšetkým signalizovať chybné (neprijateľné) výsledky z vyrovnania LGS, či sa ich spracovanie bude realizovať ako štandardné väzbové MNŠ vyrovnanie (Zeleňák, F., et al, 2007; Michalíková, F. et al, 2006) alebo ako iteratívne váhované MNŠ (robustné) vyrovnanie („iterativ gewichtete kleinste Quadrate - robuste Schätzung“, „iteratively reweighted Least Square – robust estimation“) (Casparý, 1988; Gašinec et al., 2000; Gašinec et al., 2005; Grafarend et al., 1993; Jäger et al., 2005; Wolf, 1997 a iní).

Každá z načrtnutých 3 skupín chýb bude pôsobiť v príslušných spracovaniach LGS síce na všetky priebežné a finálne hodnoty určených veličín, pritom však najvýraznejšie bude tvoriť chybné výsledky pre uvedené veličiny.

Uvedené vplyvy a výsledné situácie sa vytvárajú aj v iteratívne váhovanom robustnom MNŠ vyrovaní, keďže táto procedúra tvorí MNŠ – odhady so špeciálne vytvorenými váhami podľa zvolenej a použitej váhovej funkcie. (Carosio, 1995; Gašincová et al., 2008; Jäger et al., 2005; Kegel, 1987; Soha, 1988; Samogyi, 1988; Wicki, 1992).

Predmetná problematika pri tvorbe LGS je rozsiahla a zložitá. V danom ukázkovom prípade bude demonštrovaná len pre viazanú trilaterálnu sieť. Sú v nej simulované dve „chybné merané veličiny – dĺžky“ a jej spracovanie sa vykonáva:

- s použitím viazaného MNŠ vyrovnania,
- s použitím iteratívne váhovaného robustného MNŠ vyrovnania.

Cieľom tejto štúdie oboch spôsobov spracovania LGS je prezentovať získané experimentálne výsledky o relevantných vlastnostiach LGS a poukázať najmä na vplyvy a možnosti identifikácie chybných vstupných veličín z vektora L do spracovania LGS. Chybné DB z nekompatibility sú zistiteľne na LGS známymi spôsobmi a lokalizácia chýb v určení $(X^0 Y^0)_{UB}$ sa spravidla detekuje dvomi nezávislými určeními UB.

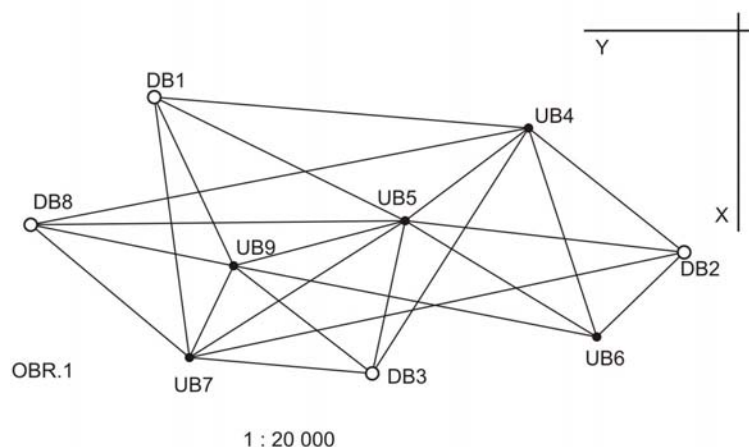
V prezentovanom pojednaní sa rieši preto situácia, kedy len niektoré merané veličiny z vektora L v LGS sú zaťažené chybami, ktoré sa v rámci zamerania siete nepreukázali.

2. Spracovanie demonštračnej LGS

Pôjde o trilaterálnu sieť (Obr. 1) v súradnicovom systéme S-JTSK, v ktorej sa simulovali 2 chybné dĺžky:

- medzi bodmi 1 a 4, $d_{14} = 1210,411m$ so zohľadnenou chybou $-14mm$ (7. dĺžka)
- medzi bodmi 5 a 8, $d_{58} = 1206,837m$ so zohľadnenou chybou $+31mm$ (9. dĺžka).

Sieť sa spracovala väzbovými MNŠ vyrovaním a robustným MNŠ vyrovaním.



Obr. 1. Trilateračná sieť.
Fig. 1. Trilateration network.

2.1. Väzbové MNŠ vyrovnanie LGS

Tab. 1. Dátumové body – DB.

Tab. 1. Datum points – DB.

DB	X [m]	Y [m]
1	1 239 001,123	264 506,299
2	1 239 502,490	262 798,622
3	1 239 894,233	263 803,973
8	1 239 413,376	264 904,569

Určované (nové) body UB a ich približne súradnice $X^0 Y^0$ určené rôznymi postupmi v rámci zamerania LGS sú uvedené v Tab. 2:

Tab. 2. Približné súradnice nových bodov.

Tab. 2. Approximate coordinates of the new points.

UB	X^0 [m]	Y^0 [m]
4	1 239 100,838	263 299,980
5	1 239 400,545	263 697,824
6	1 239 775,926	263 080,333
7	1 239 842,561	264 393,216
9	1 239 546,226	264 251,061

Dĺžky $L = [d_1, d_2, \dots, d_{24}]$ medzi bodmi siete:

$$L_{(24,1)} = \begin{bmatrix} 4-6 & 2-6 & 2-4 & 3-4 & 3-9 & 4-9 & 1-4 & 1-5 & 5-6 & 4-8 \\ 4-5 & 2-5 & 2-7 & 1-7 & 1-9 & 8-9 & 7-8 & 5-7 & 5-6 & 6-9 \\ 5-9 & 3-5 & 3-7 & 7-9 \end{bmatrix},$$

sú určené z opakovaných meraní. Ich výsledné hodnoty transformované do projekčnej roviny S-JTSK sú:

$$L_{(24,1)} = \begin{bmatrix} 709,927 & 392,594 & 642,409 & 939,941 & 566,555 & 1050,204 & 1210,411 & 901,755 & 1206,837 & 1634,74 \\ 498,107 & 904,962 & 1630,454 & 849,005 & 601,906 & 666,874 & 667,595 & 823,990 & 722,631 & 1193,036 \\ 572,094 & 504,968 & 591,506 & 328,667 \end{bmatrix}.$$

Na základe d_i , ich aposteriorných odchýlok s_{di} , $i = 1, 2, \dots, 24$ a s použitím apriórnych štandardných odchýlok σ_{di} (od výrobcu), určili sa kofaktory dĺžok q_{di} :

$$Q_L = \begin{bmatrix} 1,67 & 0,63 & 1,25 & 1,12 & 0,77 & 1,08 & 0,79 & 0,76 & 0,97 & 0,29 \\ 1,64 & 1,37 & 1,12 & 0,79 & 1,20 & 1,28 & 0,62 & 1,59 & 1,32 & 0,74 \\ 0,70 & 1,69 & 1,57 & 0,93 \end{bmatrix}.$$

Výsledky z 1. MNŠ vyrovnania:

Rezíduá $V_{(24,1)}$ [mm]:

$$V_{(24,1)} = \begin{bmatrix} 1,9 & -0,2 & 8,3 & 2,9 & 3,0 & -4,1 & 14,26 & 7,3 & -20,41 & 8,5 \\ -8,4 & -3,0 & 1,3 & 0,6 & 2,2 & 6,2 & -0,2 & -1,3 & -2,7 & 0,9 \\ 3,3 & 3,5 & -0,6 & -0,4 \end{bmatrix},$$

Určené súradnice UB a ich štandardné odchýlky sú uvedené v Tab. 3:

Tab. 3. Výsledky 1. MNŠ vyrovnania.

Tab. 3. Results of the first adjustment by least squares method.

UB	$\hat{X}(l)$ [m]	$s_{\hat{X}(l)}$ [mm]	$\hat{Y}(l)$ [m]	$s_{\hat{Y}(l)}$ [mm]
4	1 239 100,827	6,9	263 299,973	4,6
5	1 239 400,545	7,5	263 697,827	4,1
6	1 239 775,923	7,5	263 080,327	5,8
7	1 239 842,564	5,5	264 393,215	5,1
9	1 239 546,233	6,3	264 251,065	4,5

Kvadratická forma reziduí: $kfV = 1019,959$.
 Aposteriorna jednotková variancia meraní $s_0 = 8,535$ mm .

Testovanie V (Krüger, J.):

K tvorbe testovacej štatistiky sa použijú veličiny:

$$\theta_i^2 = \frac{V_i^2}{q_{Vi}}, \quad (i = 1, 2, \dots, 24),$$

$$s_i^2 = \frac{V^T \cdot Q_L^{-1} \cdot V - \theta_i^2}{n - u - 1}, \quad (i = 1, 2, \dots, 24),$$

ktoré sa zoradia podľa veľkosti $s_{\max}^2 \dots s_{\min}^2, \theta_{\max}^2 \dots \theta_{\min}^2$.

Testovacia štatistika sa vytvára podľa:

$$T = \frac{\theta_{\max}^2}{s_{\max}^2} \sim F\left(1 - \frac{\alpha}{n}; 1, n - u - 1\right); \quad \alpha = 0,05, \quad n = 24, \quad u = 10,$$

kde θ_{\max}^2 a s_{\max}^2 prináležia dĺžke L_9 a ktorá má F -rozdelenie. Jej kritická hodnota na hladine významnosti α je:

$$T_\alpha = F\left(1 - \frac{\alpha}{n}; 1, n - u - 1\right).$$

V danom prípade bude $T = 16,004$, $T_\alpha = 14,672$ a v zmysle $T > T_\alpha$, H_0 sa zamieta. Dĺžka L_9 je chybné zameraná, z $(L_{(24,1)})$ sa vyradí, vznikne vektor $(L_{(23,1)})$, s ktorým sa vykoná nové, 2. vyrovnanie LGS.

Výsledky z 2. MNŠ vyrovnania:

Rezíduá $(V_r)_{(23,1)}$ [mm]:

$$(V_r)_{(23,1)} = \begin{bmatrix} -0,7 & 0,4 & 9,0 & 1,6 & 4,0 & -2,2 & 12,9 & 1,8 & -10,0 & -4,4 \\ 3,4 & 3,2 & 2,1 & 2,9 & 3,8 & -0,2 & -4,8 & -0,5 & 0,6 & 0,2 \\ 1,5 & 0,7 & -1,4 & & & & & & & \end{bmatrix},$$

Odhady súradníc UB a ich štandardných odchýlok sú uvedené v Tab. 4:

Tab. 4. Výsledky 2. MNŠ vyrovnania.

Tab. 4. Results of the second adjustment by least squares method.

UB	$\hat{X}(2)$ [m]	$s_{\hat{X}(2)}$ [mm]	$\hat{Y}(2)$ [m]	$s_{\hat{Y}(2)}$ [mm]
4	1 239 100,828	4,8	263 299,972	3,2
5	1 239 400,546	5,2	263 697,821	3,3
6	1 239 775,921	5,2	263 080,324	4,1
7	1 239 842,566	3,8	264 393,213	3,6
9	1 239 546,235	4,4	264 251,062	3,2

Kvadratická forma reziduí: $kfV_r = 457,562$.
 Aposteriorna jednotková variancia meraní $s_{0r} = 5,933$ mm .

Testovanie V_r (Krüger, J.):

- Nulová hypotéza $H_0 : E(V_r) = 0$.
- Hodnota testovej štatistiky $T_r = 39,357$, kritická hodnota testovej štatistiky $T_{r\alpha}$ na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ je $T_{r\alpha} = 15,082$.

Na základe $T_r > T_{r\alpha}$ sa H_0 znovu zamieta. Dĺžka L_7 sa z vektora $(L_r)_{(23,1)}$ tiež vyradí, vznikne vektor

$(L_{rr})_{(22,1)}$, s ktorým sa vykoná nové, 3. MNŠ vyrovnanie LGS.

Výsledky z 3. MNŠ vyrovnania:

Rezíduá V_{rr} [mm]:
(22,1)

$$V_{rr} = \begin{bmatrix} -3,4 & 1,1 & 0,4 & 3,2 & 3,4 & 1,1 & 2,9 & -2,5 & -2,0 & 1,8 \\ 2,2 & 1,1 & 2,1 & 5,6 & -0,3 & -4,0 & 1,3 & 0,8 & -0,4 & 3,1 \\ 0,0 & -0,1 & & & & & & & & \end{bmatrix},$$

Odhady súradníc UB a ich štandardných odchýlok sú uvedené v Tab. 5:

Tab. 5. Výsledky 3. MNŠ vyrovnania.

Tab. 5. Results of the third adjustment by least squares method.

UB	$\hat{X}(3)$ [m]	$s_{\hat{X}(3)}$ [mm]	$\hat{Y}(3)$ [m]	$s_{\hat{Y}(3)}$ [mm]
4	1 239 100,831	2,4	263 299,980	2,0
5	1 239 400,544	2,5	263 697,823	1,6
6	1 239 775,923	2,6	263 080,326	2,0
7	1 239 842,565	1,9	264 393,214	1,7
9	1 239 546,233	2,2	264 251,065	1,6

Kvadratická forma rezíduí: $kfV_{rr} = 106,903$,

Aposteriórna jednotková variancia meraní $s_{0rr} = 2,868$ mm .

Testovanie V_{rr} (Krüger, J.):

- Nulová hypotéza $H_0 : E(V_{rr}) = 0$.
- Hodnota testovej štatistiky $T_{rr} = 4,575$, kritická hodnota testovej štatistiky $T_{rr\alpha}$ na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ je $T_{rr\alpha} = 14,892$.

Na základe $T_r < T_{r\alpha}$ sa H_0 nezamieta, vektor L_{rr} (a tým aj V_{rr}) je očistený od pôvodných dĺžok L_7, L_9 zaťažených hrubými chybami. Výsledky po 3. vyrovnaní LGS sú prijateľné a použiteľné.

2.2. Iteračne váhované robustné MNŠ vyrovnanie LGS

2.2.1. 1. robustné MNŠ vyrovnanie

Robustné MNŠ vyrovnanie LGS s určením jej parametrov ($\hat{X}\hat{Y}, s_{\hat{X}}s_{\hat{Y}}, V, kfV, s_0$, prípadne ďalších) sa realizovalo s použitím váhovej funkcie (Soha, 1988):

$$p_i = \frac{1}{1 + 0,05 \cdot V_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots, 24,$$

a $s_j = 11$ iteráciami (empiricky zistená dostatočná konvergenčná oblasť) pri použití východiskových jednotkových váh $p_i = 1$ pre $L_i \in L_{(24,1)}$ vzdialeností v LGS.

Z 1. iteračného postupu sa získali nasledovné hodnoty príslušných veličín:

- Odhady súradníc UB a ich štandardných odchýlok uvedené v Tab. 6:

Tab. 6. Odhady súradníc z prvého robustného vyrovnania.

Tab. 6. Coordinate estimations of the first robust adjustment.

UB	$\hat{X}(1)$ [m]	$s_{\hat{X}(1)}$ [mm]	$\hat{Y}(1)$ [m]	$s_{\hat{Y}(1)}$ [mm]
4	1 239 100,832	2,5	263 299,980	1,7
5	1 239 400,549	2,8	263 697,823	1,5
6	1 239 775,927	2,8	263 080,332	2,2
7	1 239 842,564	2,0	264 393,214	1,9
9	1 239 546,230	2,3	264 251,061	1,7

➤ Rezíduá $V_{(24,1)}$ [mm]:

$$V_{(24,1)} = \begin{bmatrix} 1,3 & -0,6 & 0,2 & 2,6 & 8,0 & 2,2 & 21,3 & 5,4 & -24,7 & -2,8 \\ 0,0 & 0,8 & 1,8 & 0,1 & -2,3 & 1,8 & -0,9 & -6,8 & 5,4 & 11,2 \\ 1,1 & -1,5 & 0,0 & 0,6 \end{bmatrix},$$

- Kvadratická forma rezíduí: $kfV_{(1)} = 139,772$.
- Aposteriorna jednotková variancia meraní $s_{0(1)} = 3,160$ mm .

Testovanie V (Baarda, W. – data snooping):

- Nulová hypotéza $H_0 : E(V) = 0$.
- Testová štatistika: $T_i = \frac{|V_i|}{\sigma_{di} \sqrt{q_{di}}}$, $i = 1, 2, \dots, 24$,

kde:

$$T_{i(1)} = \begin{bmatrix} 0,41 & 0,60 & 0,06 & 0,83 & 3,29 & 0,68 & 7,32 & 2,11 & 6,82 & 0,61 & 0,00 & 0,18 \\ 0,46 & 0,04 & 0,74 & 0,48 & 0,45 & 1,75 & 1,78 & 5,14 & 0,51 & 0,43 & 0,01 & 0,27 \end{bmatrix}.$$

- Kritická hodnota testovej štatistiky T_α na hladine významnosti $\alpha = 0,05$: $T_\alpha = 3,842$.

Keďže $(T_7 \cup T_9 \cup T_{20}) > T_\alpha$, H_0 sa zamietá, t.j. vektor V je kontaminovaný hrubými chybami, skresľujúcimi dĺžky L_7, L_9, L_{20} , pričom najväčšie skreslenie je pre L_9 .

Táto dĺžka L_9 sa z vektora $L_{(24,1)}$ vyradí, vzniká vektor $L_{r(23,1)}$, s ktorým sa vykoná nové vyrovnanie LGS (2. robustné MNŠ vyrovnanie).

2.2.2. 2. robustné MNŠ vyrovnanie

Určenie parametrov LGS sa vykonalo opäť s váhovou funkciou (*), s rovnakým rozsahom ($j=1,2,\dots,11$) iteračného procesu, s použitím jednotkových východiskových váh $p_i = 1$ pre $L_i \in L_r$ dĺžok v LGS. (23,1)

Z 2. iteračného procesu vyrovnania LGS sa získali nasledovné výsledky:

- Odhady súradníc UB a ich štandardných odchýlok uvedené v Tab. 7:

Tab. 7. Odhady súradníc z druhého robustného vyrovnania.
Tab. 7. Coordinate estimations of the second robust adjustment.

UB	$\hat{X}(2)$ [m]	$s_{\hat{X}(2)}$ [mm]	$\hat{Y}(2)$ [m]	$s_{\hat{Y}(2)}$ [mm]
4	1 239 100,827	4,9	263 299,973	3,3
5	1 239 400,548	5,3	263 697,822	3,4
6	1 239 775,922	5,3	263 080,326	4,2
7	1 239 842,566	3,9	264 393,212	3,6
9	1 239 546,234	4,5	264 251,062	3,3

➤ Rezíduá V_r [mm]:

$$V_r = \begin{bmatrix} 1,3 & -0,3 & 8,2 & 3,5 & 4,8 & 0,0 & 14,6 & 3,8 & -8,0 & -2,1 \\ 2,0 & 4,2 & 2,1 & 2,1 & 3,2 & -1,0 & -4,0 & -0,4 & 3,3 & 1,1 \\ -0,2 & 1,8 & -0,5 \end{bmatrix},$$

- Kvadratická forma rezíduí: $kfV_{(2)} = 473,270$.
- Aposteriorna jednotková variancia meraní $s_{0(2)} = 6,033$ mm .

Testovanie V_r (Baarda, W. – data snooping):

- Nulová hypotéza $H_0 : E(V_r) = 0$,
- Testová štatistika: $T_i = \frac{|V_{ri}|}{\sigma_{di} \sqrt{q_{di}}}$, $i = 1, 2, \dots, 23$,

kde:

$$T_{i(2)} = \begin{bmatrix} 0,41 & 0,27 & 2,61 & 1,11 & 2,00 & 0,01 & \mathbf{5,05} & 1,58 & 1,73 & 0,57 & 0,49 & 1,08 \\ 0,84 & 0,66 & 0,88 & 0,51 & 1,04 & 0,14 & 1,50 & 0,52 & 0,07 & 0,45 & 0,22 \end{bmatrix}.$$

- kritická hodnota testovej štatistiky T_α na hladine významnosti $\alpha = 0,05$: $T_\alpha = 3,842$.

Keďže $T_7 > T_\alpha$, H_0 sa znovu zamietá, vektor V_r je ešte stále kontaminovaný hrubou chybou v 7. observácii (dĺžky). Meraná hodnota dĺžky L_7 sa z vektora L_r vyradí, vznikne vektor observácií L_{rr} ,
(22,1)
s ktorým sa vykoná nové vyrovnanie (3. robustné MNS vyrovnanie).

2.2.3. 3. robustné MNS vyrovnanie

Aj v tomto vyrovnaní sa určenie parametrov LGS vykonalo s váhovou funkciou (*), s identickým rozsahom iteračného procesu ($j = 11$) a s použitím štartovacích váh $p_i = 1$ pre $L_i \in L_{rr}$ dĺžok v LGS.
(22,1)

Z 3. iteračného procesu vyrovnania LGS sa získali nasledovné výsledky:

- Odhady súradníc UB a ich štandardných odchýlok uvedené v Tab. 8:

Tab. 8. Odhady súradníc z tretieho robustného vyrovnania.
Tab. 8. Coordinate estimations of the third robust adjustment.

UB	$\hat{X}(3)$ [m]	$s_{\hat{X}(3)}$ [mm]	$\hat{Y}(3)$ [m]	$s_{\hat{Y}(3)}$ [mm]
4	1 239 100,829	2,8	263 299,980	2,4
5	1 239 400,547	3,0	263 697,824	1,9
6	1 239 775,924	3,1	263 080,328	2,4
7	1 239 842,565	2,2	264 393,213	2,1
9	1 239 546,233	2,6	264 251,064	1,9

- Rezíduá V_{rr} [mm]:
(22,1)

$$V_{rr} = \begin{bmatrix} -0,84 & 0,30 & 1,63 & 4,7 & 4,31 & 2,59 & 4,59 & -2,26 & -0,16 & 0,71 \\ 3,45 & 1,25 & 1,48 & 4,60 & -1,11 & -3,33 & 0,93 & 3,40 & 0,68 & 0,96 \\ 1,25 & 0,52 \end{bmatrix},$$

- Kvadratická forma rezíduí: $kfV_{(3)} = 142,299$.
- Aposteriórna jednotková variancia meraní $s_{0(3)} = 3,444$ mm.

Testovanie V_{rr} (Baarda, W. – data snooping):

- Nulová hypotéza $H_0 : E(V_{rr}) = 0$,
- Testová štatistika: $T_i = \frac{|V_{rri}|}{\sigma_{di} \sqrt{q_{di}}}$, $i = 1, 2, \dots, 22$,

kde:

$$T_{i(3)} = \begin{bmatrix} 0,27 & 0,29 & 0,61 & 1,51 & 1,77 & 0,84 & 1,94 & 0,53 & 0,04 & 0,18 & 0,88 & 0,52 \\ 0,47 & 1,25 & 0,55 & 0,87 & 0,31 & 1,57 & 0,32 & 0,28 & 0,32 & 0,25 \end{bmatrix}.$$

- Kritická hodnota testovej štatistiky T_α na hladine významnosti $\alpha = 0,05$: $T_\alpha = 3,842$.

V 3. robustnom vyrovnaní pre všetky $T_{i(3)}$ je $T_{i(3)} < T_\alpha$, teda H_0 sa nezamieta. Vektor V_{rr} predstavuje dekontaminovaný pôvodný vektor V od vychýlených hodnôt V_7, V_9 , vzťahujúcich sa na observácie L_7, L_9 zaťažené hrubými chybami.

3. Poznatzky z riešení

Postup väzbového a robustného vyrovnania LGS pre získanie spoľahlivých výsledkov (bez vplyvu chybami zaťažených dĺžok L_9, L_7 sa opakoval 3x podľa schémy uvedenej v Tab. 9:

Tab. 9. Schéma postupu vyrovnania.

Tab. 9. Scheme of the adjustment process.

Vyrovnanie	Testuje indikované chybné dĺžky vo vyrovnaniach:	
	MNŠ	ROB
1. $L_{(24,1)}$	L_7, L_9 , eliminácia L_9	L_7, L_9, L_{20} , eliminácia L_9
2. $L_{(23,1)}$	L_7, L_9 , eliminácia L_7	L_3, L_7, L_9 , eliminácia L_7
3. $L_{(22,1)}$	0	0

Z riešení sa získali výsledky (len najaktuálnejších parametrov): vyrovnané súradnice $(\hat{X}\hat{Y})_{UB}$ a ich štandardné odchýlky $(s_{\hat{X}}s_{\hat{Y}})_{UB}$ z 1., 2. a 3. vyrovnania vykonaného MNŠ väzbovým postupom a iteratívne váhovaným robustným MNŠ postupom. Prehľad odhadov $(\hat{X}\hat{Y})_{UB}$ a ich štandardných odchýlok $(s_{\hat{X}}s_{\hat{Y}})_{UB}$ z 1., 2. a 3. vyrovnania väzbového a robustného postupu dáva Tab. 10.

Tab. 10. Výsledky vyrovnání.

Tab. 10. Results of adjustments.

Postup	Bod	Väzbové MNŠ				Robustné MNŠ (váhová funkcia: SOHA, iter = 11)			
		$(\hat{X}\hat{Y})$ [m]		$(s_{\hat{X}}s_{\hat{Y}})$ [mm]		$(\hat{X}\hat{Y})$ [m]		$(s_{\hat{X}}s_{\hat{Y}})$ [mm]	
1. $L_{(24,1)}$	4	1 239 100,827	263 299,973	6,9	4,6	1 239 100,832	263 299,980	2,5	1,7
	5	1 239 400,545	263 697,827	7,5	4,1	1 239 400,549	263 697,823	2,8	1,5
	6	1 239 775,923	263 080,327	7,5	5,8	1 239 775,927	263 080,332	2,8	2,2
	7	1 239 842,564	264 393,215	5,5	5,1	1 239 842,564	264 393,214	2,0	1,9
	9	1 239 546,233	264 251,065	6,3	4,5	1 239 546,230	264 251,061	2,3	1,7
2. $L_{(23,1)}$	4	1 239 100,828	263 299,972	4,8	3,2	1 239 100,827	263 299,973	4,9	3,3
	5	1 239 400,546	263 697,821	5,2	3,3	1 239 400,548	263 697,822	5,3	3,4
	6	1 239 775,921	263 080,324	5,2	4,1	1 239 775,922	263 080,326	5,3	4,2
	7	1 239 842,566	264 393,213	3,8	3,6	1 239 842,566	264 393,212	3,9	3,6
	9	1 239 546,235	264 251,062	4,4	3,2	1 239 546,234	264 251,062	4,5	3,3
3. $L_{(22,1)}$	4	1 239 100,831	263 299,980	2,4	2,0	1 239 100,829	263 299,980	2,8	2,4
	5	1 239 400,544	263 697,823	2,5	1,6	1 239 400,547	263 697,824	3,0	1,9
	6	1 239 775,923	263 080,326	2,6	2,0	1 239 775,924	263 080,328	3,1	2,4
	7	1 239 842,565	264 393,214	1,9	1,7	1 239 842,565	264 393,213	2,2	2,1
	9	1 239 546,233	264 251,065	2,2	1,6	1 239 546,233	264 251,064	2,6	1,9

Výsledky prezentujú praktickú totožnosť vyrovnaných súradníc UB (rozdíly medzi súradnicami z väzbového a robustného vyrovnania $0 - |3|$ mm). V danom, aj v každom inom prípade, v ktorom sú chybné merania, ako MNŠ tak aj ROB postup určenia vyrovnaných súradníc UB poskytuje možnosť identifikovať chybné výsledky z meraní (dĺžky, uhly...). To umožňuje ich elimináciu z vektora L a vykonať spracovanie LGS s nekontaminovanými vplyvmi vo výsledkoch vyrovnania.

Záver

V danom, aj v každom inom prípade, v ktorom sú chybné merania, ako metóda najmenších štvorcov tak aj robustný postup výpočtu vyrovnaných súradníc určených bodov poskytuje možnosť identifikovať chybné výsledky z meraní (dĺžky, uhly...). To umožňuje ich elimináciu z vektora L a vykonať spracovanie LGS s nekontaminovanými vplyvmi vo výsledkoch vyrovnania.

Literatúra – References

- Aduol, F. W. O.: Robust Geodetic Parameter Estimation under Least Squares Through Weighting on the Basis of the Mean Square Error. In: (Grafarend, E.W. et al.): Geodesy. The Challenge of the third Millennium, p 269-276. Springer. Berlin. 2003.
- Carosio, A.: Ausgleichung geodätischer Netze mit Verfahren der robusten Statistik. *Verm., Photogram. Kulturtechnik* 93, 6, 188-191. 1995.
- Caspary, W. F.: Concepts of Network and Deformation Analysis (2nd Impr). *Monograph 11. School of Surveying U.N.S.W Kensington. 1998.*
- Gašinec, J., Gašincová, S., Rajniak, M.: K problematike vyrovnania 2D geodetických sietí. In: *Aktuálne otázky meračstva a inžinierskej geodézie: Zborník z medzinárodného vedeckého seminára: Herľany, 9-10. október 2000, s. 38-42. 2002. ISBN 80-7099-595-5.*
- Gašinec, J., Gašincová, S.: Neštandardné postupy v spracovaní meraní v lokálnych geodetických sieťach. *Acta Montanistica Slovaca, roč. 10., č. 2, s. 94-103. Košice. 2005. ISSN 1335-1788.*
- Gašincová, S., Gašinec J., Trembeczká, E.: Vyrovnanie 2D. geodetických sietí pomocou robustných metód. In: *Geodézia, kartografia a geografické informačné systémy 2008: 5. Vedecko-odborná konferencia s medzinárodnou účasťou, 16-19. september 2008, Vysoké Tatry-Stará Lesná, Košice ÚGK a GIS, s. 17. 2008. ISBN 978-553-0079-5.*
- Grafarend, W. E, Schaffrin, B.: Ausgleichsrechnung in linearen Modellen. *B.I.Wissenschaftsverlag, Mannheim. 1993.*
- Jäger, R. et al.: Klassische und Robuste Ausgleichungsverfahren. *Wichmann Vlg, Heidelberg. 2005.*
- Kegel, G.: Zur Lokalisierung grober Datenfehler mit Hilfe robuster Ausgleichsverfahren. *Vermessungstechnik* 35, 10, 348-350. 1987.
- Michalíková, F., Kozáková, Ľ., Zeleňák, F., Sisol, M.: Rádioaktivita tuhých odpadov zo spaľovania uhlia v tepelných elektrárňach. In: *Odpady, roč. 6, č. 7 (2006), s. 6-10. 2006. ISSN 1335-7808.*
- Soha, G.: Robusztus kiegyenlítés mérési javítástól függő súlyozással. *Geodézia és kartográfia* 5, 267-271. 1988.
- Somogyi, J.: Robust estimation and their use in geodesy. *Acta Geod. Geoph. Mont. Hungar., Vol 23, 45-53. 1988.*
- Stichler, S.: Untersuchung von Methoden der Identifizierung stabiler Punkte. *Vermessungstechnik* 33, 11, 203-206. 1985.
- Weiss, G., Sütti, J.: Geodetické lokálne siete I. *TU Košice, F BERG. 1997.*
- Weiss, G., Jakub, V., Weiss, E.: Kompatibilita geodetických bodov a jej overovanie. *TU Košice, F BERG. 2006.*
- Wicki, F.: Robuste Ausgleichung geodätischer Netze. *Bericht Nr. 190, ETH. Zürich. 1992.*
- Wolf, H.: Ausgleichsrechnung I.,II. (3.Aufl) *Dümmler Vlg. Bonn. 1997.*
- Zeleňák, F., Kozáková, Ľ.: Vzorkovanie. 1. vyd. *Rastislav Mantič-Willcom. Košice. 2007. ISBN 978-80-8073-875-4.*