

## Geoštatistický prístup k modelovaniu priestorovo-časových údajov na príklade prejavov banskej činnosti na ložisku Solivary

Ladislav Vizi<sup>1</sup> a Eudovít Kovanič

### Geostatistical approach of modelling of spatial-temporal data on an example of the impact of mining activities on Solivary deposit

The aim of the presented paper is to introduce with some techniques and results of the exploratory data analysis within geostatistical framework. The study is based on a geodetic survey of a surface deformation above Prešov I – Solivary mining area during 1996 – 2007 on the basis of geodetic survey by a network of point constitute a survey station. The results of the exploratory data analysis should lead to a three dimensional spatial-temporal geostatistical model of impact of a mining activity on surface above it. Final model resulted in a series of two dimensional maps of selected geodynamic phenomenon for given time of the survey.

The submitted paper presents the single steps of an analysis of spatial-temporal data with emphasis on study of the given variables under geostatistical concept as the regionalized variables and study of their stationary behaviour based on stationary hypothesis of a random function. The paper shows how the input variables were prepared and first conditions for modelling were derived. The first assumptions of stationarity in global scale for both variables were deduced from basic statistical analysis and data visualization in spatial-temporal dimensions. The study continues with theoretical description of the effect of drift on the experimental variogram and practical examples with final thought concerning to the possibilities for following geostatistical estimation in scope of stationary or non-stationary geostatistics.

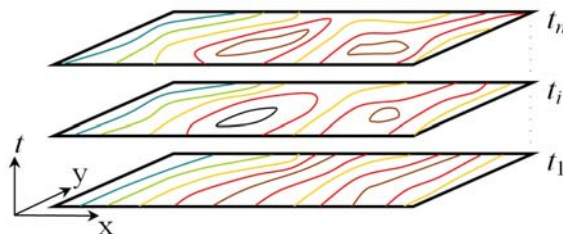
**Key words:** surface deformation, geostatistics, stationary hypothesis, drift, residuals.

### Úvod

Banská činnosť, vykonávaná či už povrchovým alebo hlbinným spôsobom, má vplyv na povrchovú situáciu územia s banskou činnosťou a v jeho okolí. Dôsledkom hlbinej ťažby sú rôzne geodynamické javy, ako sú poklesy, zdvihy, svahové deformácie. Tieto vplývajú na formovanie povrchu a často nepriaznivo ovplyvňujúce povrchové objekty, komunikácie, alebo narušujú hydrologické pomery.

Cieľom predkladaného článku je oboznámiť s geoštatistickým prístupom modelovania priestorovo a časovo orientovaných údajov na príklade analýzy geodetických meraní vertikálnych pohybov stabilizovaného bodového poľa v profiloch pozorovacej stanice vo vybranej časti dobývacieho priestoru ložiska soli Prešov I – Solivar vplyvom banskej činnosti na tomto území. Výsledkom takéhoto modelovania bude trojrozmerný (3D) priestorovo-časový model geodynamických prejavov banskej činnosti na povrchu. Výsledný model bude zložený zo série dvojrozmerných (2D) máp reprezentujúcich veľkosť deformácie povrchu v dobývacom priestore v danom čase, získaných na základe spomínaných geodetických meraní v tejto časovej etape. Tretím rozmerom vo výslednom trojrozmernom modeli je teda čas  $t$ . V TimeGIS aplikáciách je tento model známy ako „snapshot“ model (Obr. 1) [9].

Predkladaný článok prezentuje jednotlivé kroky analýzy priestorových, resp. priestorovo-časových údajov, ktorými sú tvorba príslušného súboru údajov, definovanie a odvodenie študovaných premenných, ako aj počiatkových podmienok modelovania študovaného fenoménu. Záver článku je venovaný štúdiu stationarity meraní a odvodených premenných v priestorovom ponímaní a jej vplyvu na výber geoštatistického modelu priestorovej variability študovaného javu. Nakoľko sú geoštatistické odhadovacie a simulačné techniky modelovo orientované, je práve výber tohto modelu viac kritickejšou fázou procesu modelovania ako výber samotnej techniky [8]. Z uvedeného vyplýva, že analýza priestorových údajov priamo ovplyvňuje výsledok celého procesu modelovania do ktorého ani zďaleka nepatrí len príprava databázy vstupných údajov, ľubovoľný výber interpolačnej techniky a kliknutie na tlačidlo , čo je bežná prax v prípade používania komerčných „black box“ softvérových prostredí. Cieľom analýzy priestorových údajov ako takej musí byť výber takých následných krokov modelovania, ktoré vedú k výsledkom s minimálnou chybou odhadu založeného na vstupných údajoch.



Obr. 1. Schematické znázornenie „snapshot“ modelu.  
Fig. 1. Schematic picture of „snapshot“ model.

<sup>1</sup> Ing. Ladislav Vizi, PhD., Doc. Ing. Eudovít Kovanič, CSc., Ústav geodézie, kartografie a GIS, Fakulta BERG, TU v Košiciach. Park Komenského 19, 042 00 Košice, Slovak Republic. [ladislav.vizi@tuke.sk](mailto:ladislav.vizi@tuke.sk)  
(Revidovaná a recenzovaná verzia dodaná 27. 10. 2008)

## Geoštatistický koncept modelovania

Geoštatistika, ako samostatná vedná disciplína, je založená na teórii **náhodnej funkcie a regionalizovanej premennej**. Náhodná funkcia je súbor náhodných premenných, ktoré sú funkciami priestorových a/alebo časových súradníc. Regionalizovaná premenná je súbor realizácií náhodnej funkcie ako výsledok náhodného výberu z nekonečnej populácie regionalizovaných premenných, ktoré prichádzajú do úvahy [14]. Skutočnosť, že sa variabilita regionalizovanej premennej na malých vzdialenostiach javí ako náhodná, otvára priestor pre rozšírenie klasického štatistického ponímania náhodnej premennej v jej priestorovej podobe. Tak ako na výsledok hodu kockou pôsobí množstvo faktorov existujúcich mimo ľudskej kontroly, tak sú aj faktory determinujúce hodnoty náhodných premenných príliš komplikované a komplexné na to, aby ich bolo možné popísať jednoduchou funkciou. Riešením je pozeráť sa na tieto hodnoty ako na výsledok pôsobenia a interakcií súboru náhodných procesov. Zo stochastického pohľadu bude potom v každom bode priestoru existovať celý súbor hodnôt a nie iba jediná hodnota. To znamená, že v každom ľubovoľnom bode priestoru  $x_i = f(x_i, y_i, z_i)$  bude existovať spojitá náhodná premenná  $Z$ , popísaná svojím zákonom rozdelenia pravdepodobnosti. Pozorovaná hodnota  $z(x_i)$  je len jednou realizáciou spojitaj náhodnej premennej  $Z_i = Z(x_i)$  z nekonečného množstva možných hodnôt a je získaná náhodným výberom z daného rozdelenia pravdepodobnosti, ktorý sa v danom bode  $x_i$  uplatňuje.

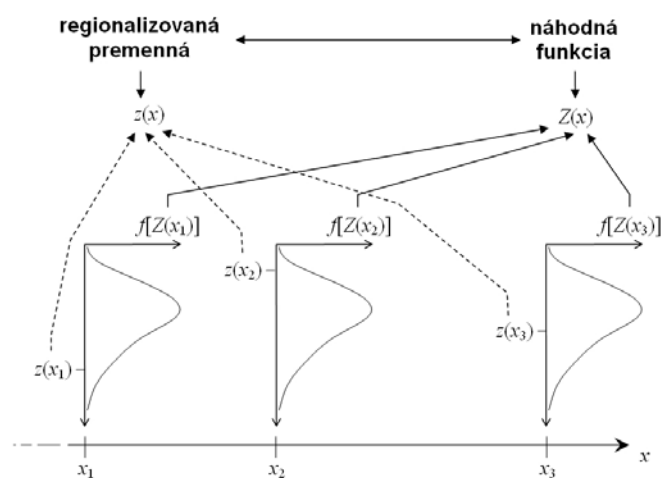
Regionalizovaná premenná  $z(x)$  predstavuje súbor jednotlivých realizácií príslušných náhodných premenných  $Z$  v každom bode priestoru  $x$ . Ako už bolo uvedené, tieto realizácie sú výsledkom pôsobenia náhodných procesov, ktoré sa v bodoch priestoru v danom čase uplatňovali. Definícia regionalizovanej premennej ako premennej distribuovanej v priestore je čisto popisná a neobsahuje žiadnu pravdepodobnostnú interpretáciu. Z matematického hľadiska je regionalizovaná premenná taká náhodná premenná, ktorá je funkciou priestorových súradníc  $x$ , ktorá v každom bode priestoru nadobúda určitú hodnotu  $z$ , čo označíme ako  $z(x)$ . Táto funkcia sa však mení tak nepravidelne, že je vylúčený akýkoľvek priamy matematický výskum. Na druhej strane, za každým lokálne nestálym aspektom regionalizovanej premennej je možné sledovať určitú štruktúru jej priestorovej variability. Z toho vyplýva, že regionalizovaná premenná v sebe zahŕňa dva zdanlivo protichodné aspekty [12]:

1. lokálny, náhodný aspekt, ktorý pripomína predstavu o náhodnej premennej –  $\varepsilon(x)$ ,
2. štruktúrny (alebo priemerný) aspekt, ktorý je možné funkčne vyjadriť –  $\mu(x)$ .

Správna formulácia regionalizovanej premennej musí tento dvojitý aspekt náhodnosti a štruktúry brať do úvahy, aby bolo možné aspoň zjednodušené zobrazenie jej priestorovej variability. Možné riešenie ponúka pravdepodobnostná interpretácia prostredníctvom náhodnej funkcie, pomocou ktorej sa súbor neznámych hodnôt v priestore vzťahuje k príslušným priestorovo závislým náhodným premenným [8]. Nespoľahlivosť odhadu hodnoty atribútu v akejkoľvek pozícii  $x$  študovaného priestoru je modelovaná na základe súboru možných realizácií náhodnej premennej v tejto pozícii  $x$ .

Ako už bolo uvedené, náhodná funkcia  $Z(x)$  je súbor náhodných premenných  $Z_1 = Z(x_1)$ ,  $Z_2 = Z(x_2)$ , ...,  $Z_n = Z(x_n)$  v  $n$  bodoch priestoru [16]. Keďže samotný priestor je tvorený nekonečným počtom bodov a spojitá náhodná premenná je tvorená nekonečným počtom možných realizácií, je možné sa pozeráť na náhodnú funkciu ako na „superpopuláciu“ s dvojitým nekonečnom [20]. Koncept regionalizovanej premennej a náhodnej funkcie umožňuje popísať štruktúru priestorovej variability študovaného fenoménu. Súbor simulovaných realizácií náhodnej funkcie umožňuje modelovať nespoľahlivosť odhadu priestorovej distribúcie tohto fenoménu na celom študovanom území.

Popisovaný koncept je schematicky zobrazený na Obr. 2. Na tomto obrázku sú v 1D priestore v troch náhodne vybraných bodoch  $x_\alpha$  náhodne vybrané tri hodnoty  $z(x_\alpha)$  z troch náhodných premenných  $Z_\alpha = Z(x_\alpha)$  definovaných distribučnou funkciou rozdelenia hustoty pravdepodobnosti  $f[Z(x_\alpha)]$ . Hodnoty  $z(x_\alpha)$  tvoria regionalizovanú premennú  $z(x)$  a náhodné premenné  $Z(x_\alpha)$  tvoria náhodnú funkciu  $Z(x)$ .



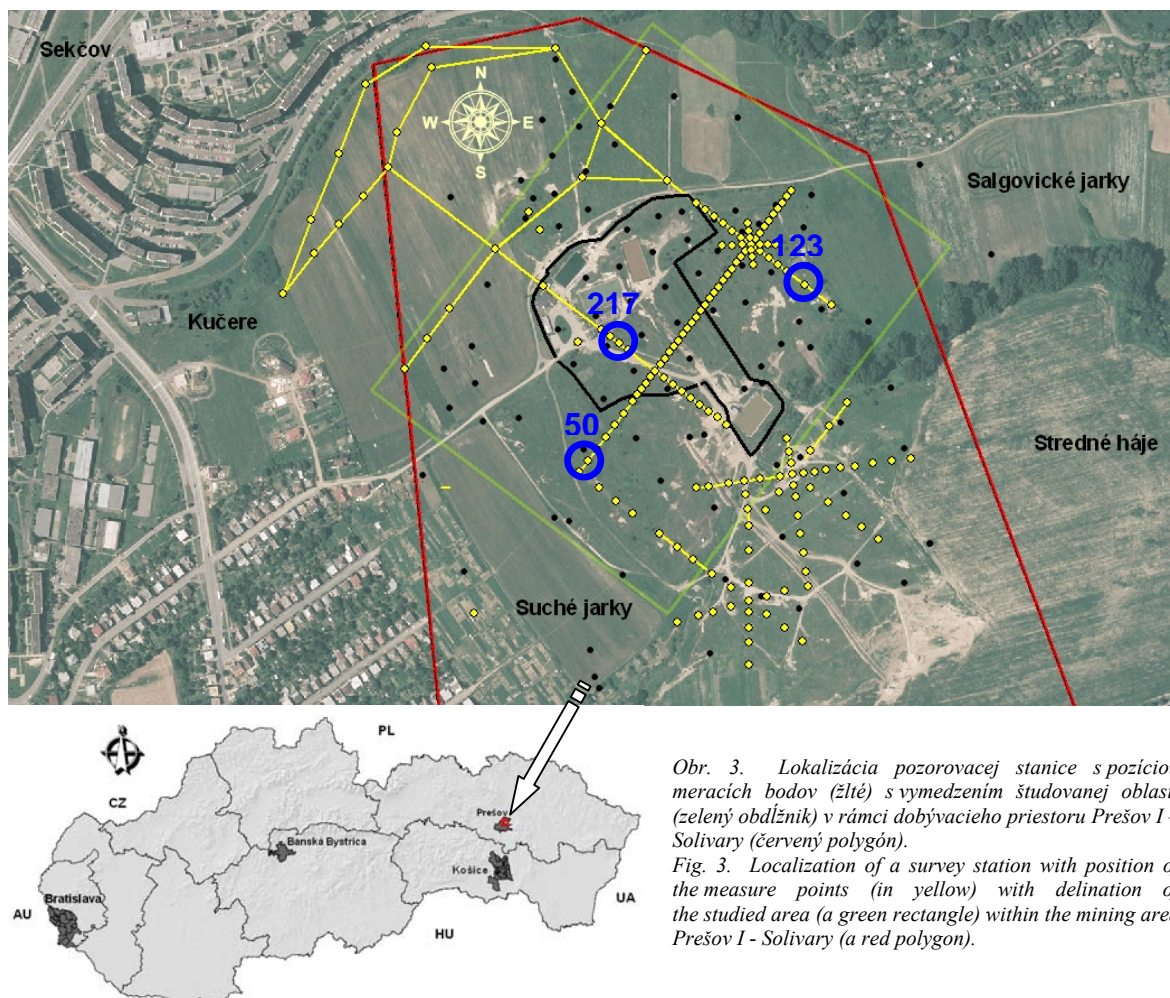
Obr. 2. Koncept regionalizovanej premennej a náhodnej funkcie.  
Fig. 2. Concept of regionalized variable and random function.

### Popis vstupných údajov

Dostupné údaje zo spoločnosti Solivary Prešov, a.s., reprezentujú geodetické merania zmien výšok jednotlivých bodov stabilizovaného bodového poľa pozorovacej stanice v dobývacom priestore ložiska soli Prešov I - Solivary. Ťažba soli sa na tomto ložisku realizuje technológiou lúhovania, pri ktorej vznikajú umelé podzemné priestory, soľné komory, ktorých vytváranie počas lúhovania a čerpania soľanky vplyva na deformáciu povrchu nad nimi [17]. Veľkosť týchto deformácií a zmien je výsledkom mnohých faktorov, ako je veľkosť komôr v danom čase, rýchlosť lúhovania, hĺbka lúhovania, prepojenie jednotlivých komôr, stupeň vyplnenia komôr kalmi a pod. Veľkosť týchto priestorov môže jednotlivo dosahovať plošnú rozlohu do 80 až 120 metrov, ale po vzájomnom prepojení komôr až 200 a viac metrov, s výškou dosahujúcou hrúbku ložiska [13]. Na základe týchto skutočností sa v spomínanom dobývacom priestore zistili poklesy a zdvihy rádu stoviek milimetrov, pričom hodnoty poklesov časom narastali a z ich priebehu na bodoch líniových profilov sa jasne rysovali charakteristické tvary poklesových kotlín. V dôsledku toho hrozilo nebezpečenstvo rozsiahlych závalov nadložia a následný výron soľanky do okolitých poľnohospodárskych kultúr a vodných tokov, čo poukázalo na nutnosť mapovania stavu vytvárania poklesových kotlín a vybudovania pozorovacej stanice [13].

Na Obr. 3 sú žlté zobrazené polygóny a profily pozorovacej stanice s pozíciou jednotlivých pozorovacích bodov. Čierne body predstavujú pozície vrtoz. Zeleným obdĺžnikom je ohraničená študovaná oblasť v rámci dobývacieho priestoru ložiska soli (červený polygón). Vyznačený bod č. 50 sa nachádza na profile 01-02 (smer SV-JZ), bod č. 123 na profile 1 (smer SZ-JV) a bod č. 217 na profile č. 2 (smer SZ-JV).

Geodetické merania zmien výšok bodov stabilizovaného bodového poľa pozorovacej stanice boli realizované v pravidelných časových intervaloch dvakrát ročne od roku 1976. Dostupné údaje z týchto jednotlivých meraní boli od októbra 1996 po apríl 2007 (pravidelné jarné a jesenné merania v danom roku) čo dáva regularizovaného nositeľa informácie v časovej osi. Spolu tak bolo k dispozícii 22 časových etáp  $t$  geodetických meraní.



Obr. 3. Lokalizácia pozorovacej stanice s pozíciou meracích bodov (žlté) s vymedzením študovanej oblasti (zelený obdĺžnik) v rámci dobývacieho priestoru Prešov I - Solivary (červený polygón).

Fig. 3. Localization of a survey station with position of the measure points (in yellow) with delineation of the studied area (a green rectangle) within the mining area Prešov I - Solivary (a red polygon).

Na základe dostupných údajov boli v každom pozorovacom bode s pozíciou  $x_\alpha = f(x, y, z)$  a v každom čase  $t$  odvodené dve základné premenné:

1. Hodnoty zmien nadmorskej výšky od základnej výšky ( $OZV$ ) podľa vzťahu:

$$OZV_t(x_\alpha) = ZV(x_\alpha) - NV_t(x_\alpha), \quad (1)$$

kde:  $OZV_t(x_\alpha)$  je výsledný rozdiel geodetického merania v čase  $t$  od základnej výšky [m],

$ZV(x_\alpha)$  je základná nadmorská výška uvedená pri každom pozorovacom bode v pozícii  $x_\alpha$  [m n. m.],

$NV_t(x_\alpha)$  je nadmorská výška nameraná v každom pozorovacom bode v pozícii  $x_\alpha$  v danej meracej etape v čase  $t$  [m n. m.].

Je na mieste poznamenať, že na rozdiel od geodetických výpočtov zmien výšok od určitej základnej výšky, keď je výsledný rozdiel záporný pre **pokles** a kladný pre **zdvih**, bude v tomto prípade znižovanie meranej výšky bodu od základnej výšky hodnota kladná a naopak. Dôvodom pre tento prístup je, aby vo vytvorenom vstupnom súbore bola premenná  $OZV$  striktne kladná, a to pre potrebu kontroly výsledkov a ďalšie porovnávanie s princípmi modelovania z oblasti geológie v nasledujúcej kapitole. Okrem uvedených dôvodov nemá voľba tohto prístupu žiadny iný podklad ako komfort autorov článku pri analýzach a kontrolách výsledkov. Tento prístup teda nemá žiadny vplyv na dosiahnuté výsledky a pre ich záverečnú prezentáciu a vizualizáciu je možné jednoducho použiť kalkulátor, či už v použitom špecializovanom geoštatistickom prostredí alebo v GIS prostredí. Pre úplnosť je potrebné uviesť, že pri výpočte hodnôt premennej  $OZV$  pre dostupné časové etapy meraní sa objavili aj záporné hodnoty reprezentujúce prítomnosť zdvihov, avšak len veľmi ojedinele, s veľmi nízkymi hodnotami a na okrajových častiach pozorovacej stanice, mimo študované územie, preto sa s týmito hodnotami v ďalších analýzach nepočíta.

2. Hodnoty zmien nadmorskej výšky pre jednotlivé etapy meraní ( $PE$ ) podľa vzťahu:

$$PE_t(x_\alpha) = NV_t(x_\alpha) - NV_{t-1}(x_\alpha), \quad (2)$$

kde:  $PE_t(x_\alpha)$  je rozdiel nadmorských výšok pre danú časovú etapu  $t$  [m],

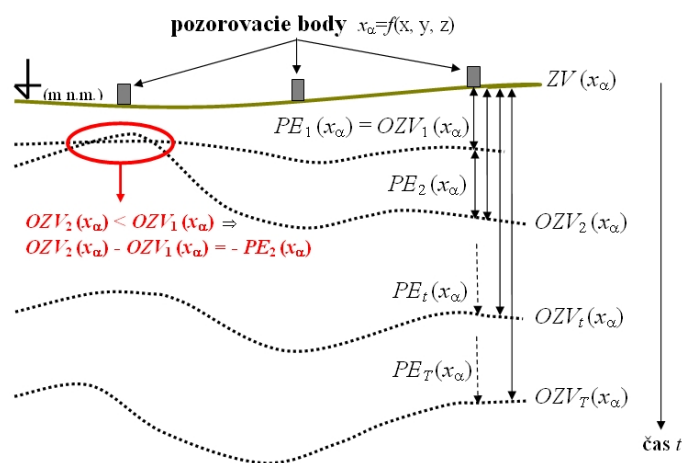
$NV_t(x_\alpha)$  je nadmorská výška nameraná v každom pozorovacom bode v pozícii  $x_\alpha$  v danej meracej etape v čase  $t$  [m n. m.],

$NV_{t-1}(x_\alpha)$  je nadmorská výška nameraná v každom pozorovacom bode v pozícii  $x_\alpha$  v predchádzajúcej etape  $t-1$  [m n. m.].

Realizácie jednotlivých premenných boli identifikované na základe príslušných označení bodov tvoriacich profily pozorovacej stanice a následne regionalizované na základe  $x, y$  súradníc pozorovacích bodov. Tretím rozmerom sú označenia meračských etáp  $t$ . Takýmto spôsobom vznikol vstupný súbor s vyše 160 meračskými bodmi identifikovanými svojimi súradnicami v priestore a príslušnými hodnotami študovaných premenných v čase, rešpektujúcimi líniovú štruktúru vertikálnej časovej osi (Obr. 7 a 8).

Princíp vyššie popísaného výpočtu oboch premenných je schematicky znázornený na Obr. 4. Na základe tejto schémy je možné odvodiť isté podmienky modelovania študovaného fenoménu. Prvou podmienkou je, že meranie  $PE$  v prvej etape merania bude zhodné s meraním  $OZV$ , čiže:

$$PE_1(x_\alpha) = OZV_1(x_\alpha). \quad (3)$$



Obr. 4. Schematické zobrazenie postupu odvodenia študovaných premenných.  
Fig. 4. Schematic picture of procedure of deriving of the variables under study.

Druhou podmienkou je, že suma meraní  $PE$  po určitých za sebou nasledujúcich etapách bude zhodná s meraním  $OZV$  v tejto etape:

$$\sum_{i=1}^t PE_i(x_\alpha) = OZV_i(x_\alpha), \quad (4)$$

čo je možné zovšeobecniť pre všetkých 22 dostupných etáp meraní nasledovne:

$$\sum_{i=1}^{T=22} PE_i(x_\alpha) = OZV_T(x_\alpha). \quad (5)$$

kde  $T$  je celkový čas pre všetkých 22 meračských etáp.

### Geodynamický vs. geologický model

Z predošlých záverov vyplýva istá paralelu medzi modelovaním priestorovo-časových geodynamických prejavov vplyvu ťažby na povrch a modelovaním hĺbok sekvencie chronostratigrafických vrstiev v geológii. Geoštatistické postupy modelovania takýchto sekvencií chronostratigrafických vrstiev detailne popisuje [18]. Isté rozdiely sa vyskytujú z dôvodu samotnej povahy geodynamických javov v porovnaní so sekvenciou geologických vrstiev. Prvým dôvodom je zmiešaná povaha geodynamických prejavov banskej činnosti, ktoré sú výsledkom rozličných, spolupôsobiacich javov ako sú zosuvy, poklesy, zdvihy a horizontálne posuny, ktoré majú za následok priestorovú deformáciu povrchu [13]. Ďalším dôvodom je, že pri modelovaní geodynamických prejavov banskej činnosti na povrchu nie vždy platí podmienka zachovania inherentnej korelácie v geometrickom a nie štatistickom zmysle [7]. Táto podmienka je pri modelovaní báz geologických vrstiev založená na predpoklade, že rozdiel hĺbok dvoch po sebe nasledujúcich báz  $Z_1(x)$  a  $Z_2(x)$  dáva hodnotu hrúbky geologickej vrstvy  $T_2(x)$  so spodnejšou bázou  $Z_2(x)$  [19]. Je zrejmé, že hrúbka geologickej vrstvy je striktné kladná regionalizovaná premenná s hodnotami rovnými alebo väčšími ako 0, nikdy nie so zápornými hodnotami, čiže [4]:

$$Z_1(x) - Z_2(x) = T_2(x) \geq 0. \quad (6)$$

Táto podmienka môže byť dodržaná pri modelovaní geodynamických prejavov banskej činnosti na povrchu len v prípade, že sa bude prejavovať len jeden jav, napr. pokles, a aj to len v prípade postupného sadania povrchu s postupnou tvorbou poklesovej kotliny na študovanom území.

Na základe postupu vytvárania vstupného súboru, popisého v predchádzajúcej časti a štúdia oboch odvodených premenných je zrejmé, že na študovanom území sa prejavujú dva hlavné geodynamické prejavy banskej činnosti na povrchu, a to:

1. poklesy (záporný jav, keď sa znižuje hodnota nadmorskej výšky pozorovacieho bodu),
2. zdvihy (kladný jav, keď sa zvyšuje hodnota nadmorskej výšky pozorovacieho bodu).

Z uvedeného dôvodu a na základe vzťahu (1) je zrejmé, že neplatí nerovnica vyplývajúca z Obr. 4:

$$OZV_1(x_\alpha) \leq OZV_2(x_\alpha) \leq \dots \leq OZV_i(x_\alpha) \leq \dots \leq OZV_T(x_\alpha), \quad (7)$$

výsledkom čoho je kladná alebo záporná hodnota  $PE$  (Obr. 4, červené označenie) a vyjadrenie (2) môže byť upravené nasledovne:

$$OZV_i(x_\alpha) - OZV_{i+1}(x_\alpha) = \pm PE_{i+1}(x_\alpha). \quad (8)$$

Z uvedeného vyplýva, že na základe tohto vyjadrenia nie je možné očakávať model, pre ktorý by platila nerovnica spĺňajúca podmienku inherentnej korelácie geologického modelu:

$$E[OZV_1(x)] \leq E[OZV_2(x)] \leq \dots \leq E[OZV_i(x)] \leq \dots \leq E[OZV_T(x)]. \quad (9)$$

### Koncept priestorovej kovariancie a hypotézy stacionarity náhodnej funkcie

Ako už bolo uvedené, náhodná funkcia je súbor náhodných premenných definovaných v určitom priestore. Rovnako ako je náhodná premenná definovaná svojou distribučnou funkciou, tak bude aj náhodná funkcia  $Z(x)$  charakterizovaná súborom všetkých jej  $n$  distribučných funkcií pre akýkoľvek, teoreticky nekonečný, počet bodov v  $n$  pozíciách,  $x_i = 1, \dots, n$ , ktoré tvoria úplnú  $n$  - rozmernú distribučnú funkciu náhodnej funkcie  $Z(x)$ :

$$F(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_n) = \Pr[Z(x_1) \leq z_1, \dots, Z(x_n) \leq z_n]. \quad (10)$$

Z praktických dôvodov je hlavný záujem sústredený na bivariačnú distribučnú funkciu dvojíc náhodných premenných  $Z(x_1)$  a  $Z(x_2)$  v rôznych bodoch  $x_1$  a  $x_2$ , pre ktoré bude existovať spoločná distribučná funkcia:

$$F[Z(x_1, x_2; z)] = \Pr[Z(x_1) \leq z, Z(x_2) \leq z], \quad (11)$$

pre všetky hodnoty  $z$ . Podobne ako je možné odvodiť vzťah medzi  $n$  pámi pozorovaní  $u_\alpha$  a  $v_\alpha$  náhodných premenných  $U$  a  $V$  pomocou kovariancie, rovnako je možné tento koncept rozšíriť do jeho priestorovej podoby. Náhodné premenné  $U$  a  $V$  sa na základe svojich priestorových súradníc stávajú náhodnými premennými  $Z(x_1)$  a  $Z(x_2)$  jednej náhodnej funkcie  $Z(x)$  v dvoch rôznych údajových bodoch  $x_1$  a  $x_2$ . Ich vzájomná kovariancia  $C(x_1, x_2)$  sa vypočíta nasledovne:

$$C(x_1, x_2) = E[(Z(x_1) - \mu(x_1))(Z(x_2) - \mu(x_2))], \quad (12)$$

kde  $\mu(x_1)$  a  $\mu(x_2)$  sú priemerné hodnoty náhodnej premennej  $Z$  v bodoch  $x_1$  a  $x_2$ . Na rozdiel od klasického chápania kovariancie párov náhodných premenných nemá rovnica (12) riešenie. Dôvodom je, že v praxi je štúdium regionalizovaných premenných obmedzené len na jednu realizáciu  $z$  náhodnej premennej  $Z$  v danom bode vo väčšinou nepravidelne rozmiestnených vzorkách v pozíciách  $x_\alpha$ . To znamená, že nepoznáme a ani nevieme odhadnúť priemernú hodnotu v bode s dostupným meraním. Tak sa dostávame do „slepej uličky“ z ktorej sa dá dostať len na základe určitých hypotéz, tzv. hypotéz **stacionarity**. Na ich základe sa predpokladá, že jednotlivé merania v bodoch  $x_\alpha$  sú realizácie tej istej premennej [14].

Pojem stacionarita vyjadruje skutočnosť, že distribúcia náhodného procesu a jej charakteristiky ostávajú rovnaké v každom bode priestorovo-časového kontinua [15]. Inými slovami, momentové charakteristiky náhodnej premennej  $Z$  ostávajú rovnaké v akomkoľvek bode  $x$ . V prípade, ak sa nemenia prvé dva momenty rozdelenia (stredná hodnota a rozptyl), ide o tzv. **striktnú stacionaritu**. V takom prípade bude spoločná distribučná funkcia podľa (11) pre hodnoty v bodoch  $x_1$  a  $x_2$  rovnaká pre akúkoľvek inú spoločnú distribučnú funkciu párov hodnôt v bodoch  $x_\alpha$  a  $x_\beta$ . Náhodná funkcia je v takom prípade, t.j. invariantná vzhľadom k posunu polohy v priestore (a/alebo čase) [19].

V prípade, ak priemer náhodnej premennej  $Z$  ostáva konštantný vo všetkých bodoch  $x$  a jednotlivé realizácie v týchto bodoch sú len náhodnými fluktuáciami okolo tohto priemeru, hovoríme o **stacionarite druhého rádu**, alebo hypotéze slabej stacionarity. V takom prípade je možné nahradiť vo vyjadrení (12) priemery v bodoch  $x_1$  a  $x_2$  jedným priemerom:

$$\mu(x_1) = \mu(x_2) = \mu = E[Z(x)]. \quad (13)$$

Druhý moment náhodnej premennej – rozptyl – získame ak budú body  $x_1$  a  $x_2$  totožné ( $x_1 = x_2$ ), to znamená, že vzdialenosť medzi nimi bude 0:

$$\sigma^2 = E[(Z(x) - E[Z(x)])^2]. \quad (14)$$

Tento rozptyl je konečný a podobne ako priemer, je rovnaký v každom bode. V prípade, ak polohy bodov  $x_1$  a  $x_2$  nie sú totožné ( $x_1 \neq x_2$ ), bude ich vzájomná kovariancia závisieť len na vzdialenosti a smere medzi nimi a nie absolútnych polohách. Zovšeobecnením vyjadrenia (12) je možné zapísať kovarianciu medzi všetkými pámi hodnôt v bodoch  $x_\alpha$  a  $x_\beta$  oddelených rovnakým vektorom  $h = x_\beta - x_\alpha$  nasledovne:

$$C(x_\alpha, x_\beta) = E[(Z(x_\alpha) - \mu)(Z(x_\beta) - \mu)] = E[Z(x_\alpha)Z(x_\beta) - \mu^2] = C(h). \quad (15)$$

Táto kovariancia ostáva konštantná pre akýkoľvek vektor  $h$  a vyjadruje tzv. priestorovú funkciu **autokovariancie**. „Auto“ vyjadruje závislosť medzi hodnotami regionalizovanej premennej  $z(x)$  náhodnej funkcie  $Z(x)$  s meniacou sa vzdialenosťou  $h$ . V prípade ak sa  $x_\alpha = x_\beta$ , potom  $h = 0$  a  $C(0) = \sigma^2$ . Z uvedeného je zrejmé, že funkcia priestorovej kovariancie je funkcia klesajúca so vzdialenosťou  $h$  s počiatkom v  $\sigma^2$ . Tento koncept je možné rozšíriť pre viaceré náhodné funkcie vo forme multivariačnej geoštatistiky a tzv. lineárneho modelu koregionalizácie [12].

Ako bolo uvedené v časti o geoštatistickom koncepte modelovania, náhodný proces je možné vyjadriť pomocou nasledujúceho modelu:

$$Z(x) = \mu(x) + \varepsilon(x). \quad (16)$$

Tento vzťah vyjadruje skutočnosť, že hodnota náhodnej premennej  $Z$  v akomkoľvek bode  $x$  je zložená z priemernej hodnoty študovaného procesu a náhodného komponentu pochádzajúceho z distribúcie s nulovým priemerom a príslušnou funkciou autokovariancie:

$$C(h) = E[\varepsilon(x)\varepsilon(x+h)]. \quad (17)$$

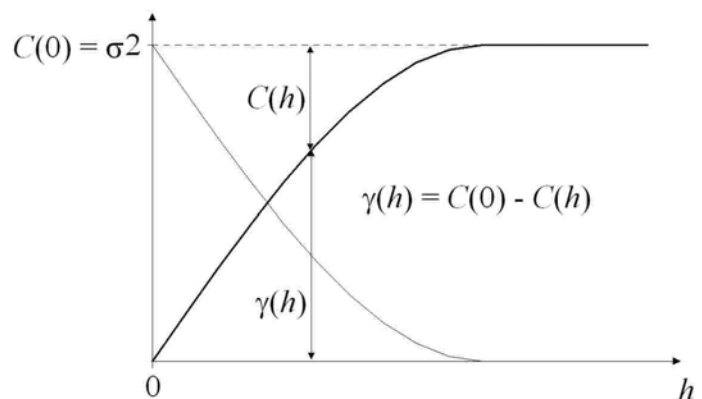
Pri množstve empirických údajov a meraní sa často stretávame so skutočnosťou, že očakávaná hodnota náhodného procesu nie je konštantná, čím sa vzdľujeme od konceptu stacionarity druhého rádu, pretože nevieme nahradiť hodnoty priemeru  $\mu(x_1)$  a  $\mu(x_2)$  vo vyjadrení (12) jedným priemerom  $\mu$  a dostať sa tak k vyjadreniu (15). Nekonštantný priemer, v štatistike známy ako trend, je v geoštatistike označovaný ako **drift**, okolo ktorého kolíšu dostupné údaje. Na rozdiel od štatistickej trendovej analýzy nie sú rezíduá hodnôt okolo tohto driftu chybami, ale sú to plne akceptovateľné črty priestorovej variability študovaného fenoménu so svojou vlastnou štruktúrou. Prof. Matheron [14] navrhol riešenie tohto problému, ktoré sa stalo hlavným prínosom praktickej geoštatistiky. Problém nekonštantného priemeru vyriešil predpokladom, že očakávaná hodnota rozdielov hodnôt v bodoch  $x_\alpha$  a  $x_\beta$  bude rovná nule len pre malé prírastky hodnoty  $h$ :

$$E[Z(x_\alpha) - Z(x_\beta)] = 0 \text{ pre } h \rightarrow 0. \quad (18)$$

Ďalším krokom bolo nahradenie funkcie priestorovej autokovariancie rozptylom týchto prírastkov, ktorý, rovnako ako autokovariancia, závisí na hodnote  $h$  a nie absolútnych pozícií bodov  $x$ :

$$\text{VAR}[Z(x_\alpha) - Z(x_\beta)] = E\{[Z(x_\alpha) - Z(x_\beta)]^2\} = 2\gamma(h). \quad (19)$$

Rovnice (18) a (19) sú základom Matheronovej **intrinzičkej hypotézy stacionarity**, alebo tiež hypotézy vnútornej stacionarity. Výraz  $\gamma(h)$  je známy ako semivariogram (skrátene **variogram**), kde predpona „semi“ vyjadruje skutočnosť, že  $\gamma(h)$  je iba polovica rozptylu rozdielov hodnôt na vzdialenosti  $h$ , tzv. semivariancia hodnôt párov údajových bodov, alebo tiež priemer štvorca rozdielu dvoch hodnôt. Pribeh funkcie variogramu je stúpajúca funkcia po hodnotu tzv. prahu, ktorý sa teoreticky rovná rozptylu dostupných údajov pre stacionárnu náhodnú funkciu. Nakoľko si definícia variogramu nevyžaduje konštantný priemer nebude platiť, že intrinzičná náhodná funkcia bude nevyhnutne stacionárna. V takom prípade nebude variogram dosahovať prah – tzv. neohraničený variogram, pre ktorý neexistuje príslušná funkcia kovariancie [1]. Na rozdiel od variogramu zodpovedá funkcia kovariancie intrinzičkej a stacionárnej náhodnej funkcie. Vzťah medzi funkciou variogramu a kovariancie je na Obr. 5. Z obrázku je jednoznačne zrejmé, že v prípade variogramu, ktorý nie je ohraničený hodnotou prahu, bude nadobúdať príslušná funkcia kovariancie za hodnotou rozptylu  $\sigma^2$  záporné hodnoty. Model, ktorý spĺňa túto podmienku podmienenej kladnosti, sa nazýva **lineárny model regionalizácie** [12].

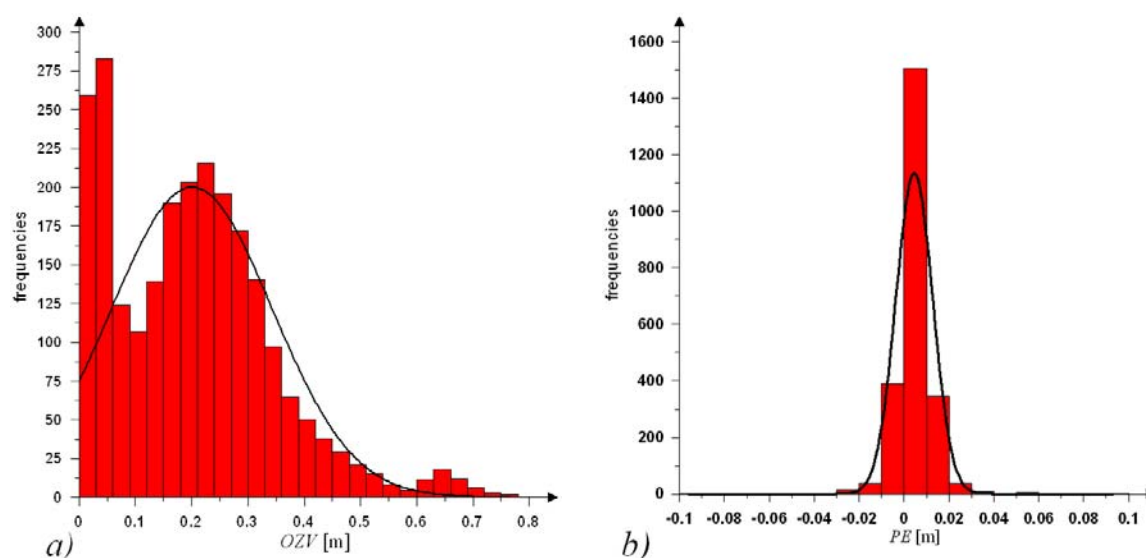


Obr. 5. Vzťah medzi grafickým priebehom funkcie kovariancie a variogramu.  
Fig. 5. Relationship between covariance and variogram.

### Štúdium stacionarity premenných *OZV* a *PE*

Ak existuje systematická zmena priemeru náhodnej premennej v priestore a/alebo čase, na určitej relevantnej škále požadovanej pre potreby odhadu, nie je možné ďalej predpokladať stacionárny model pre túto premennú. Treba mať však na pamäti, že stacionarita náhodnej funkcie nie je charakteristika študovaného fenoménu, ale je to vlastnosť modelu tejto funkcie, nie však dostupných údajov – predpoklad stacionarity jednoducho umožňuje utvárať predpoklady, ktoré poskytujú priestor pre riešenie problémov odvodenia optimálnej odhadovacej procedúry za predpokladu jej dôslednej analýzy a rozhodnutí o jej existencii na danej priestorovej škále [5].

Na Obr. 6 sú zobrazené histogramy rozdelenia početnosti oboch študovaných premenných. Na histograme premennej *OZV* (Obr. 6 a)) sa objavujú viaceré populácie, ktoré je možné v kvalitnom softvérovom prostredí ľahko identifikovať [18]. Populácia nízkych hodnôt poklesov s veľkou početnosťou sa nachádza v okrajových častiach pozorovacej stanice. Dominantná populácia stredne vysokých hodnôt sa nachádza na takmer všetkých bodoch pozorovacej stanice. Najmenej početná populácia najvyšších hodnôt poklesov sa nachádza na krížení profilov 01-02 a 2. Pre potreby tejto štúdie sú dôležité posledné dve populácie.

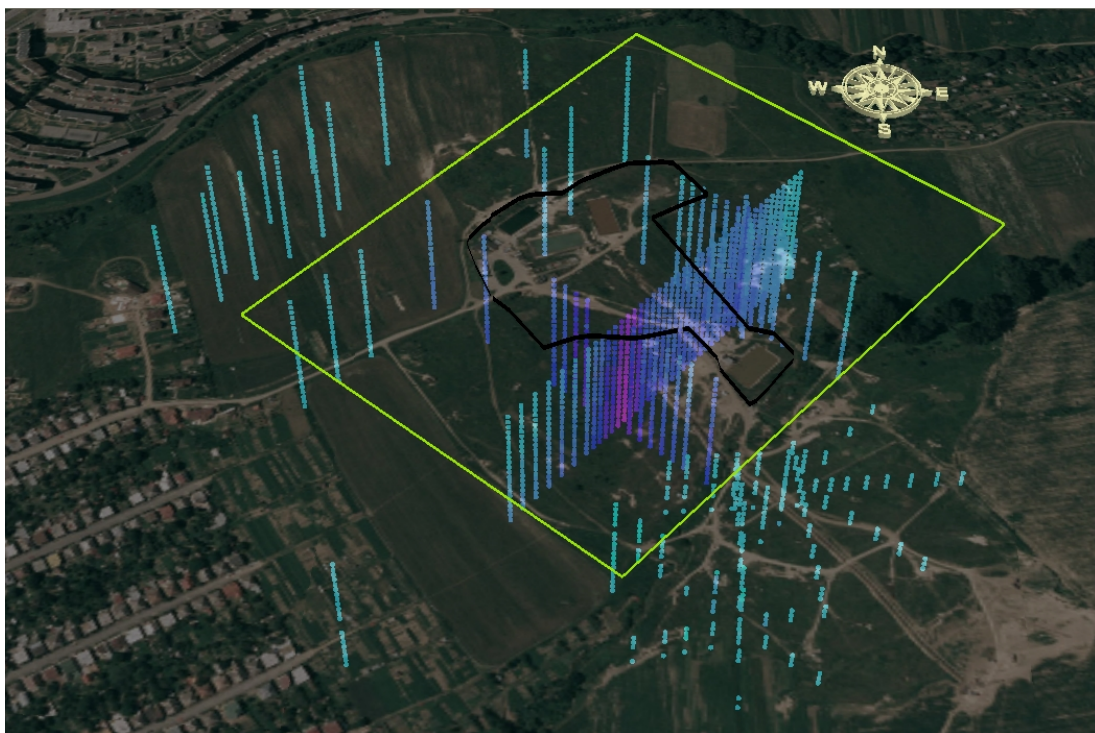


Obr. 6. Histogramy rozdelení početnosti študovaných premenných: a) premenná *OZV*, b) premenná *PE*.  
Fig. 6. Histograms of the variables under study: a) *OZV* variable, b) *PE* variable.

Na Obr. 7 sú zobrazené merania premennej *OZV* v modro-fialovej farebnej škále v trojrozmernom priestore, kde tretí rozmer reprezentuje čas  $t$ . Na tomto obrázku je veľmi zreteľne vidieť zvyšovanie hodnôt poklesov od okrajových častí pozorovacej stanice, pričom najvyššie hodnoty sa kumulujú na krížení spomínaných profilov (fialová farba). Viacmodálny histogram v kombinácii s takouto grafickou prezentáciou indikuje možnú prítomnosť nestacionárnej regionalizovanej premennej. V tomto konkrétnom prípade je možné očakávať horizontálnu regionalizáciu poklesov s možnou prítomnosťou globálneho kvadratickeho driftu, vyplývajúceho zo samotného konkávneho tvaru vytvárania poklesovej kotliny v študovanom dobývacom priestore.

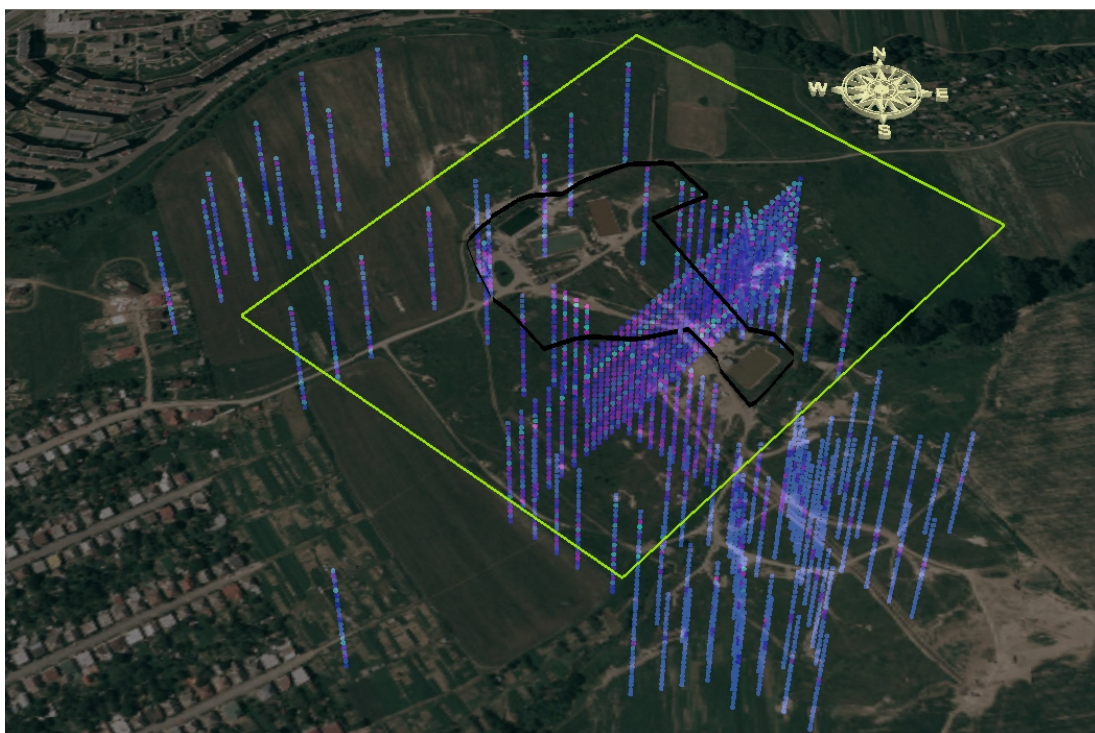
V prípade rozdelenia študovanej oblasti na menšie podoblasti modelovaním účinného okolia odhadu je možné, že sa kvadratický drift zredukuje na lineárny, resp. na kvázi stacionárne homogénnej jednotky. Z toho vyplýva, že rozhodnutie o stacionarite študovanej regionalizácie je záležitosťou veľkosti škály pozorovania. Takáto možnosť rozdelenia študovaného územia na menšie kvázi-stacionárne podoblasti je však podmienená množstvom dostupných údajov v rámci každej podoblasti pre potreby odvodenia priemeru a kovariancie náhodnej funkcie a schopnosťou oddeliť jednotlivé populácie dostupných údajov tak, aby bolo možné správne rozhodnúť, ktorá náhodná funkcia prislúcha danému bodu študovanej oblasti bez merania [8]. Je tiež možné, že následná variografia nepreukáže prítomnosť neohraničeného variogramu a potrebu globálneho modelovania driftu.





Obr. 7. Hodnoty meraní premennej *OZV* v modro-fialovej farebnej škále. Tretím rozmerom je čas merania (smerom dole).  
 Fig. 7. Values of *OZV* variable colored in blue-purple scale. Third dimension is time (downward).

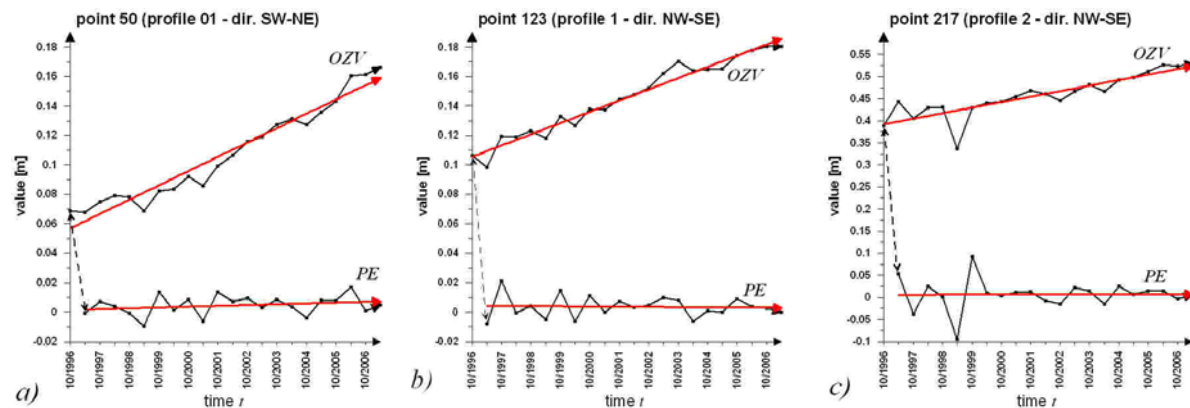
Na rozdiel od premennej *OZV* je histogram premennej *PE* (Obr. 6b)) normálne rozdelený, čo potvrdil aj Kolmogorov-Smirnovov test. Na histograme sa ojedinele objavili extrémne hodnoty na oboch stranách priemernej hodnoty. Grafická trojrozmerná prezentácia dostupných meraní nevykazuje rovnaký trend postupného zvyšovania hodnôt od okrajových častí pozorovacej stanice smerom ku kríženiu profilov 01-02 a 2 (Obr. 8) na základe čoho je možné usúdiť, že premenná *PE* je v horizontálnej rovine stacionárna.



Obr. 8. Hodnoty meraní premennej *PE* v modro-fialovej farebnej škále. Tretím rozmerom je čas merania (smerom dole).  
 Fig. 8. Values of *PE* variable colored in blue-purple scale. Third dimension is time (downward).

Predošlá analýza poskytla určité závery o horizontálnej stacionarite. Pri priestorovo-časovej analýze údajov je potrebné sa sústrediť aj na časovú os dostupných údajov.

Na Obr. 9 sú zobrazené priebehy dynamiky pohybov povrchu v čase v troch náhodne vybraných pozorovacích bodoch vyznačených na mape pozorovacej stanice na Obr. 3. Bod 50 sa nachádza na profile 01 v smere SV-JZ, bod 217 na profile 2 v smere SZ-JV, ktorý križuje profil 01-02 a nakoniec bod 123 sa nachádza na profile 1 v smere SZ-JV, ktorý križuje profily 02-03. Horné grafy na Obr. 9 predstavujú priebeh meraní v týchto bodoch *OZV* a dolné *PE*. Horizontálna os predstavuje časovú os s jednotlivými etapami meraní vertikálnych pohybov bodov pozorovacej stanice.

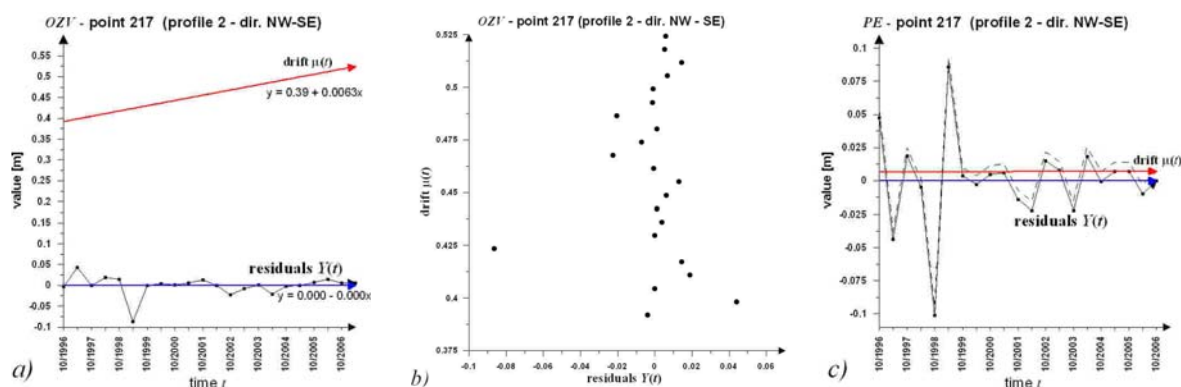


Obr. 9. Priebehy meraní študovaných premenných *OZV* a *PE* v troch náhodne vybraných bodoch pozorovacej stanice (Obr. 3).  
Fig. 9. Graphs of the studied variables for three randomly selected points of the survey station (see in Fig. 3 for locations).

Na základe grafických zobrazení priebehov meraní *OZV* v troch náhodne vybraných bodoch je zrejmé, že variabilita meraní dynamiky pohybov povrchu od základnej výšky môže byť rozdelená do dvoch komponentov:

1. systematické lineárne stúpanie v čase (červená čiara) reprezentujúce lineárny drift,
2. variabilné kolísanie okolo lineárnej zložky (čierna čiara) označované ako reziduá, ktoré predstavujú náhodnú variabilitu, ktorá ostáva po odstránení driftu.

Na Obr. 10a) sú oddelené vyššie popísané zložky pre bod 217. V spodnej časti grafu je zobrazený konštantný priebeh reziduí s nulovým priemerom (modrá čiara), nevykazujúce prítomnosť driftovej zložky (červená čiara).



Obr. 10. Celková variabilita premennej *OZV* v meračskom bode 217 (Obr. 9c) rozdelená do driftovej a reziduálnej zložky (a), bodový graf hodnôt reziduí a driftu (b) a celková variabilita premennej *PE* v bode 217 rozdelená do driftovej a reziduálnej zložky (c).  
Fig. 10. Total variability of *OZV* values in data point 217 (Fig. 9c) subdivided into drift and residual components (a), scattergram of residuals vs. drift (b) and total variability of *PE* values in data point 217 subdivided into drift and residual components (c).

Drift je v geoštatistickej terminológii priemerná hodnota premennej definovaná ako funkcia priestorovej pozície, v ktorej je premenná meraná. Hodnota premennej  $Z$  v akomkoľvek bode  $x$  môže byť podľa (16) vyjadrená ako súčet dvoch veličín, a to priemeru v bode  $x$  a odchýlky  $Y$  meranej hodnoty od priemeru:

$$Z(x) = E[Z(x)] + Y(x) = \underbrace{\mu(x)}_{\text{drift}} + \underbrace{Y(x)}_{\text{reziduá}}, \quad (20)$$

pričom sa predpokladá, že:

1. Drift je deterministická funkcia priestorových súradníc, v tomto konkrétnom prípade lineárna funkcia pozície v čase  $t$ :

$$\mu(t) = a_0 + a_1(t). \quad (21)$$

Lineárny drift (21) je možné uviesť vo všeobecnejšej forme ako lineárnu kombináciu funkcií [10]:

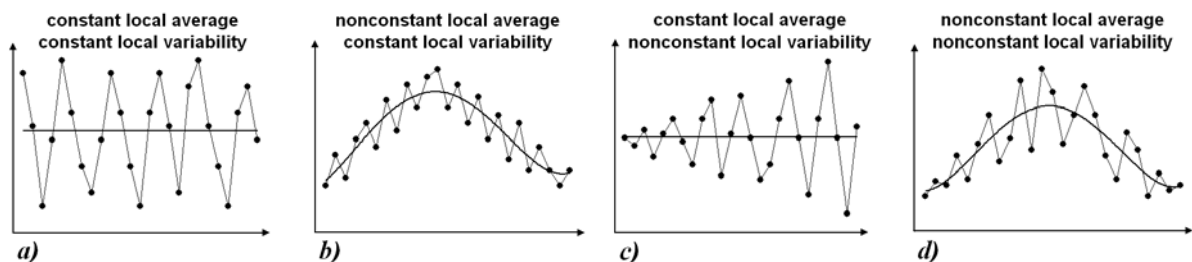
$$\mu(x) = \sum_{l=0}^L a_l f_l(x), \quad (22)$$

kde  $a_l$  sú neznáme koeficienty a  $f_l(x)$  sú známe funkcie priestorových súradníc v bode  $x$ . V praxi sú tieto funkcie nahrádzané väčšinou polynómom 1. až 3. rádu, teda funkciou lineárnou, kvadratickou alebo kubickou.

2. Rezíduum  $Y(x)$  je stacionárna náhodná premenná s konštantným priemerom.
3. Drift a reziduá sú nezávislé (Obr. 10b)).

Na Obr. 10c) je zobrazený rozklad meraní  $PE$  v bode 217 na trendovú a reziduálnu zložku. Z obrázku je zrejmé, že extrakcia konštantného driftu nemá žiaden výrazný vplyv na získanie stacionárnych rezíduí, čo znamená, že premenná  $PE$  neobsahuje driftovú zložku, alebo aspoň nie v bode 217. Ďalšie štúdium neprekázalo prítomnosť driftu pozdĺž časovej osi v žiadnom bode pozorovacej stanice. Premennú  $PE$  je teda možné považovať za stacionárnu premennú v horizontálnej aj vertikálnej rovine.

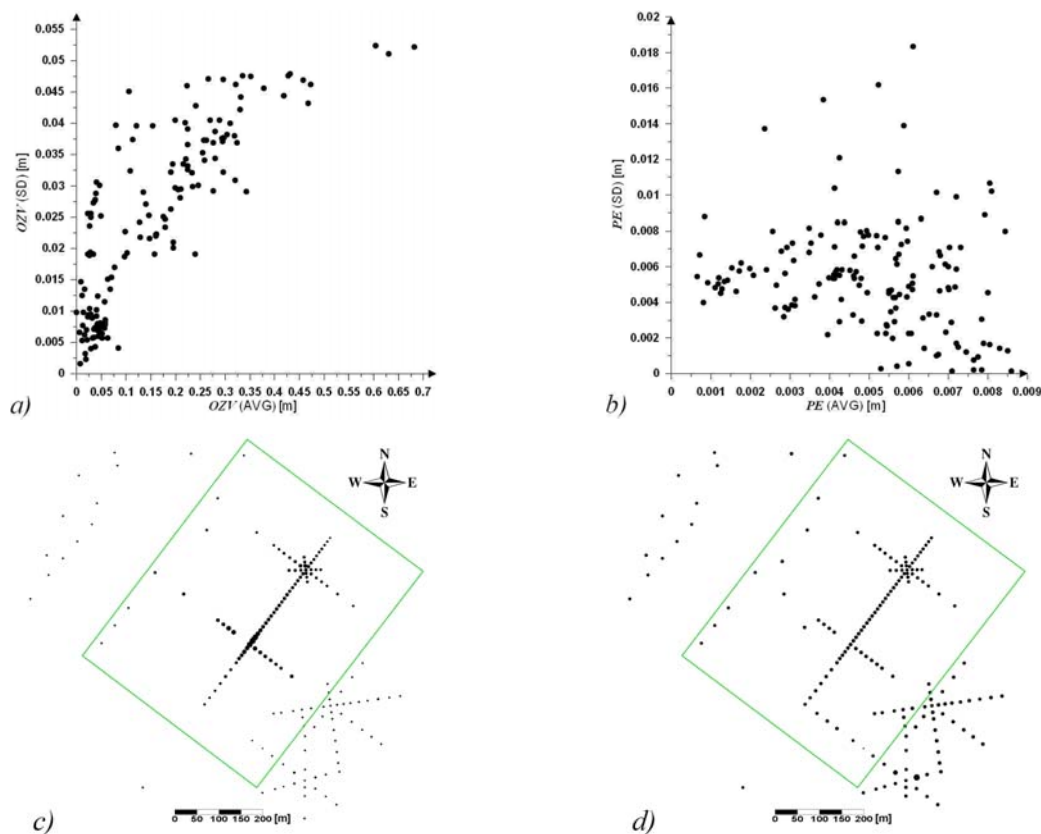
Jednou z možností identifikácie driftu je preveriť dostupné údaje na prítomnosť proporcionálneho efektu, ktorý sa zvyčajne objavuje v prípade lognormálneho rozdelenia obsahu rudných zložiek v ložiskách nerastných surovín [2, 6]. Proporcionálny efekt prezentuje závislosť lokálneho rozptylu dostupných údajov na lokálnom priemere, ktorý je v prípade prítomnosti tohto efektu často kvadratický [3]. Vo všeobecnosti má lokálna variabilita vplyv na presnosť interpolačnej procedúry bez ohľadu na jej výber [11]. Na Obr. 11 sú zobrazené štyri rôzne vzťahy medzi lokálnym priemerom a lokálnou variabilitou.



Obr. 11. Teoretický profil hodnôt ilustrujúci štyri rôzne vzťahy medzi lokálnym priemerom a lokálnym rozptylom: a) neprítomnosť trendu v lokálnom priemere alebo lokálnom rozptyle, b) trend v lokálnom priemere, c) trend v lokálnom rozptyle, d) trend v lokálnom priemere a rozptyle – proporcionálny efekt [11].

Fig. 11. Theoretical profile of data showing four common relationship between the local mean and the local variability: a) no trend in the local average or the local variability, b) trend in the local average, c) trend in the local variability, d) trend in the local average and the local variability – proportional effect [11].

Na Obr. 12a) je zobrazený graf priemerných hodnôt premennej  $OZV$  a príslušných smerodajných odchýlok vypočítaných v každom meračskom bode. Z grafu je zrejmé, že existuje vzťah medzi priemernými hodnotami a smerodajnými odchýlkami meraní na študovanom území, a že so zvyšujúcou sa hodnotou priemeru sa zvyšuje aj smerodajná odchýlka. Takýto efekt sa neobjavuje v prípade premennej  $PE$  (Obr. 12b)). Mapa priemerných hodnôt premennej  $OZV$  vykazuje tendenciu ich zvyšovania od okrajových častí smerom do centrálnej časti v kríženích profilov 01-02 s 2 a 02-03 s 1 (Obr. 12c)). Podobne vyzerá aj mapa vypočítaných smerodajných odchýlok. Priemerné hodnoty premennej  $PE$  v meračských bodoch sú rovnomerne rozložené na študovanom území (Obr. 12d)) a rovnako tak aj príslušné smerodajné odchýlky.



Obr. 12. Vzťah medzi priemernými hodnotami a smerodajnými odchýlkami v meračských bodoch premennej OZV (a), PE (b) a mapy priemerných hodnôt v meračských bodoch premennej OZV (c) a PE (d).  
 Fig. 12. Relationship between the average and the standard deviation in data points for OZV variable (a) and PE variable (b) and post-plots of average values in data points for OZV variable (c) and PE variable (d).

### Vplyv driftu na experimentálny variogram

Odhad rozptylu náhodnej premennej  $Z$  je možné vyjadriť nasledovne:

$$\text{Var}[Z] = E[(z - \bar{z})^2] = \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n (z_{\alpha} - \bar{z})^2 = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n z_{\alpha}^2 - \left[ \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n z_{\alpha} \right]^2, \quad (23)$$

kde  $\bar{z}$  predstavuje priemernú hodnotu náhodnej premennej. Funkcia variogramu bola podľa (19) vyjadrená ako rozptyl rozdielov hodnôt. Táto funkcia je odhadovaná na základe výpočtu tzv. experimentálneho variogramu podľa nasledujúceho vyjadrenia:

$$2\gamma(h) = \frac{1}{N(h)} \sum_{\alpha=1}^{N(h)} [z(x_{\alpha}) - z(x_{\beta})]^2, \quad (24)$$

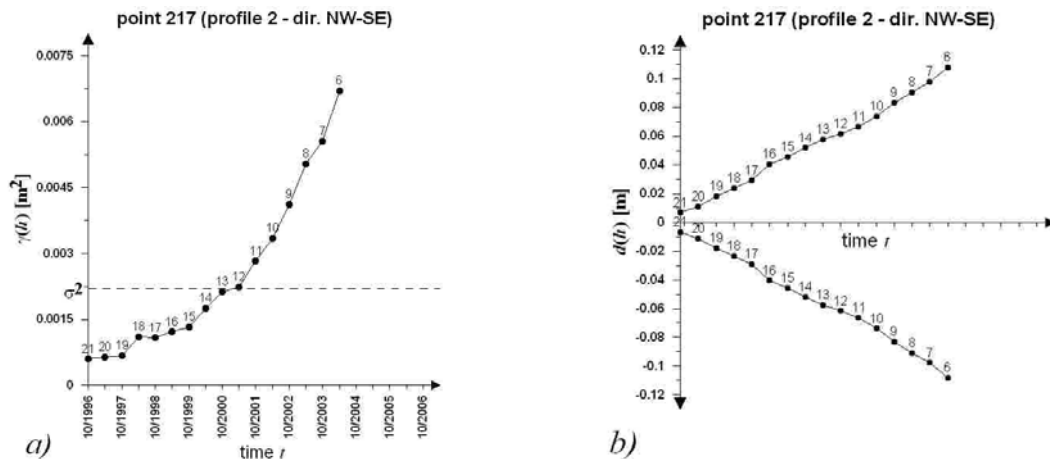
kde  $N(h)$  je počet párov hodnôt  $z(x_{\alpha})$  a  $z(x_{\beta})$  oddelených vzdialenosťou  $h$ . Podľa vzťahu (23) bude výpočet experimentálneho variogramu vyjadrený nasledovne:

$$2\gamma(h) = \frac{1}{N(h)} \sum_{\alpha=1}^{N(h)} [z(x_{\alpha}) - z(x_{\beta})]^2 - \left[ \frac{1}{N(h)} \sum_{\alpha=1}^{N(h)} [z(x_{\alpha}) - z(x_{\beta})] \right]^2. \quad (25)$$

Výraz  $d(h)$  v (25) predstavuje odhad vplyvu driftovej zložky náhodnej funkcie. Z intrinzičkej hypotézy stacionarity vyplýva, že intrinzičná a stacionárna náhodná funkcia rastie funkcia variogramu pomalšie ako  $h^2$ :

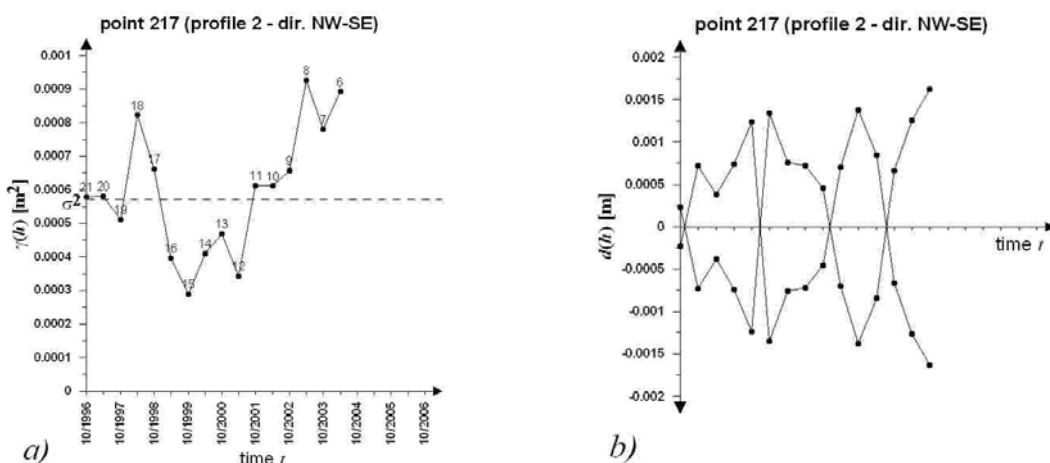
$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\gamma(h)}{h^2} = 0 \quad (26)$$

V takom prípade je funkcia variogramu ohraničená hodnotou prahu. V opačnom prípade rastie funkcia variogramu rýchlejšie ako  $h^2$  a výsledný experimentálny variogram je neohraničený čo zodpovedá intrinzičkej, ale nestacionárnej náhodnej funkcii. Na Obr. 13a) je zobrazený graf experimentálneho variogramu pozdĺž časovej osi v bode 217. Z obrázku je zrejmé, že experimentálny variogram má stúpajúci charakter s parabolickým priebehom, pričom sa so vzdialenosťou znižuje počet párov podieľajúcich sa na výpočte hodnoty experimentálneho variogramu v konkrétnej etape. Príčinou takéhoto stúpania experimentálneho variogramu je systematická zmena hodnôt  $d(h)$  pozdĺž časovej osi (Obr. 13b)).



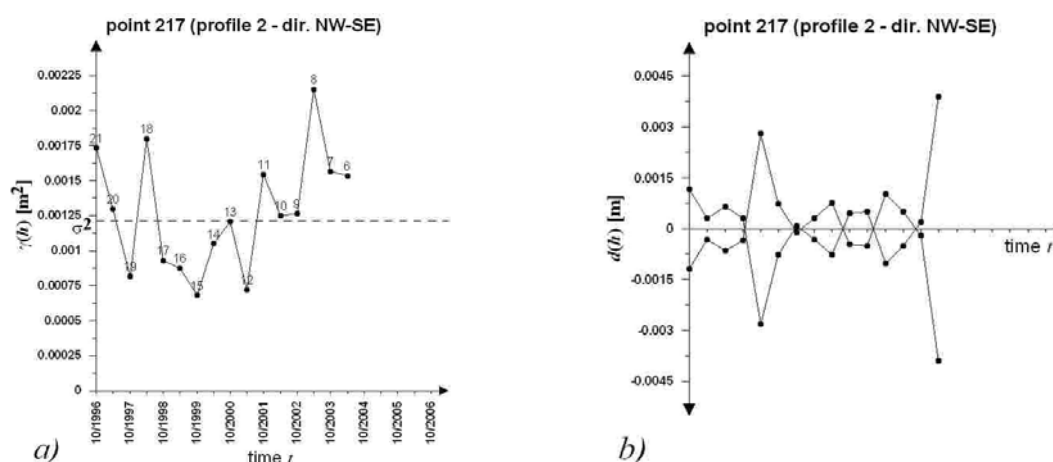
Obr. 13. Experimentálny variogram hodnôt premennej OZV v bode 217 (a) a graf hodnôt driftu v bode 217 (b).  
Fig. 13. Experimental variogram of OZV values in point 217 (a) and plots of drift values of OZV values in the point 217 (b).

Na Obr. 14a) je zobrazený priebeh experimentálneho variogramu pre hodnoty rezíduí po odstránení lineárneho driftu uvedenom na Obr. 10a). Experimentálny variogram je zle štruktúrovaný z dôvodu vysokej variability hodnôt v počiatočných etapách meraní, ktoré sa objavujú na priebehu hodnôt premennej OZV v bode 217 (Obr. 9c)), čo sa odráža aj na vypočítaných reziduách (Obr. 10a)). Napriek tomu, tento experimentálny variogram nevykazuje systematické stúpajúce a predpoklad neohraničeného variogramu, ale kolíše okolo hodnoty rozptylu výsledných rezíduí v tomto bode. Rovnako je tomu aj v prípade zobrazenia hodnôt driftu pozdĺž časovej osi, ktoré kolíšu okolo 0 (Obr. 14b)).



Obr. 14. Experimentálny variogram rezíduí hodnôt premennej OZV v bode 217 (a) a graf hodnôt driftu týchto rezíduí v bode 217 (b).  
Fig. 14. Experimental variogram of residuals of OZV values in the point 217 (a) and plots of drift values of residuals of OZV values in the point 217 (b).

Pre úplnosť je na Obr. 15a) zobrazený experimentálny variogram hodnôt premennej  $PE$  v bode 217. Rovnako ako v prípade rezíduí hodnôt premennej 217 v tomto bode je experimentálny variogram veľmi zle štruktúrovaný z už uvedených dôvodov, avšak neprejavuje sa prítomnosť driftu, ktorého hodnoty kolíšu okolo 0 (Obr. 15b)).



Obr. 15. Experimentálny variogram hodnôt premennej  $PE$  v bode 217 (a) a graf hodnôt driftu v bode 217 (b).  
Fig. 15. Experimental variogram of  $PE$  values in the point 217 (a) and plots of drift values for  $OZV$  values in the point 217 (b).

## Záver

Na základe analýzy prieskumných údajov je vykonávaný odhad hodnôt študovanej regionalizovanej premennej na kvázi spojitých sieti bodov. Tomu predchádza dôkladná štruktúrna analýza študovaných premenných a modelovanie smerových variogramov. V prípade nestacionárneho prístupu predchádza modelovaniu variogramov analýza experimentálnych variogramov, ktorých cieľom je skúmať veľkosť vplyvu driftovej zložky na ich priebeh v jednotlivých smeroch a modelovanie globálneho trendu. Tieto kroky sú v čase publikovania tohto článku v štádiu rozpracovania a analýz.

Vzhľadom ku geoštatistickému prístupu spracovania dostupných údajov meraní prejavov banskej činnosti na povrch v dobývacom priestore Prešov I – Solivary je možné pristúpiť k odhadu hodnôt premennej  $OZV$ , ktorá je pozdĺž časovej osi nestacionárna. Posúdenie stacionárnosti horizontálnej regionalizácie si bude vyžadovať samostatný výpočet priemerných experimentálnych variogramov v horizontálnej rovine v rôznych smeroch. Existuje predpoklad, že tieto výsledky nepotvrdia predpoklad nestacionárneho správania sa vývoja poklesovej kotliny v oblasti dobývacieho priestoru, alebo aspoň nie vo všetkých študovaných smeroch. V takom prípade sa situácia zjednoduší na modelovanie driftovej funkcie len vo vertikálnom smere reprezentujúcom časovú os vývoja poklesovej kotliny, alebo nastavenie neohrančeného modelu variogramu (lineárny, mocninový) v tomto smere. V horizontálnej rovine nebude treba zohľadňovať problém vplyvu nestacionarity na modelovanie jedného alebo viacerých smerových variogramov nevykazujúcich vplyv driftu.

V prípade odhadu hodnôt premennej  $PE$  sa nepredpokladá nestacionárny prístup. Vzhľadom k tomu, a v prípade, že výskyt extrémnych hodnôt bude mať za následok zle štruktúrované a erraticke smerové experimentálne variogramy, bude možné transformovať dostupné hodnoty tejto premennej do normálneho Gaussovho rozdelenia a eliminovať tak vplyv extrémnych hodnôt na výpočet experimentálnych variogramov.

Pre kompletizáciu priestorovo-časového modelu bude potrebné vytvoriť model časovej vrstvy  $PE_1 = OZV_1$  samostatne. Pre vytvorenie modelu tejto vrstvy bude výhodné využiť digitálny model terénu študovanej oblasti ako sekundárnej informácie ako externý drift, ktorý však bude potrebné najprv kalibrovat' na hodnoty  $ZV$  v pozíciách meračských bodov pozorovacej stanice.

*Príspevok vznikol v rámci riešenia grantových úloh „Aplikácia geoštatistických nástrojov pre multivariačnú analýzu a integráciu dát regionalizovaných premenných“, VEGA č. 1/0222/08 a „Implementácia geografických informačných systémov do monitoringu a analýzy prejavov banskej činnosti v lokalite Solivar a následné modelovanie a hodnotenie kinematickej aktivity horninového masívu nástrojmi GIS z hľadiska perspektívy ďalšieho využitia územia pre urbanistickú výstavbu“, VEGA č. 1/3351/06 na Fakulte BERG TU v Košiciach .*

## Literatúra - References

- [1] Chiles, J. P., Delfiner, R.: *Geostatistics – Modeling spatial uncertainty*. Oxford University Press, 1999.
- [2] David, M.: *Geostatistical Ore Reserve Estimation*. Elsevier Scientific Publishing Company. 1977.
- [3] Deutsch, C. V., Journel, A. G.: *GSLIB Geostatistical Software Library. 2<sup>nd</sup> edition*. Oxford University Press, Inc. New York 1998.
- [4] Deutsch, C. V.: *Geostatistical Reservoir Modeling*. Oxford University Press, Inc. New York, 2002.
- [5] Dowd, P. A.: *MINE5260 Non-Stationarity*. MSc. in Mineral Resources and Environmental Geostatistics. University of Leeds, Leeds, U.K. 2004.
- [6] Dowd, P. A.: *MINE5280 Non-linear Geostatistics*. MSc. in Mineral Resources and Environmental Geostatistics. University of Leeds, Leeds, U.K. 2004.
- [7] Dowd, P. A.: Conditional simulation of inter related beds in an oil deposit. *In: Geostatistics for Natural Resources Characterization. Part 2 (pg. 1031-1043)*. Vergly, G et al. (eds.). Dordrecht Reidel Publishing Company. 1984.
- [8] Goovaerts, P.: *Geostatistics for natural resources evaluation*. Oxford University Press, 1997.
- [9] Hlásny, T.: *Geografické informačné systémy – Priestorové analýzy*. Zephyros & Národné lesnícke centrum – Lesnícky výskumný ústav Zvolen, 2007.
- [10] Horák, J.: *Prostorové analýzy dat*. VŠB-TU Ostrava, HGF, Institut geoinformatiky. 2006.
- [11] Isaaks, E. H., Srivastava, R. M.: *An Introduction to Applied Geostatistics*. Oxford University Press, Inc. 1989.
- [12] Journel, A. G., Huijbregts, Ch. J.: *Mining Geostatistics*. Academic Press Inc. 1978.
- [13] Kovanič, Ľ.: Výber výsledkov meračských prác v odbore priemyselnej geodézia. *Habilitačná práca*. Technická univerzita, Fakulta BERG, 1998.
- [14] Matheron, G.: *The Theory of Regionalized Variables and its Application*. École Nationale Supérieure des Mines des Paris. 1971.
- [15] Olea, R. A.: *Geostatistics for Engineers and Earth Scientists*. Kluwer Academic Publishers. 2003.
- [16] Staněk, F.: *Geostatistika, přednáška 1. Sůbor přednášek z predmetu Geostatistika*. VŠB – TU Ostrava. 2006.
- [17] Vavrek, P.: Geotechnické aspekty ťažby soli na slovenských ložiskách. *Acta Montanistica Slovaca. Vol. 9, No. 3, s. 325-328*. Košice. 2004.
- [18] Vizi, L.: Modelovanie reliéfov neogénnych súvrství Východoslovenskej panvy. *Doktorandská dizertačná práca*. Technická univerzita, Fakulta BERG. Košice. 2005.
- [19] Wackernagel, H.: *Multivariate Geostatistics*. 3<sup>rd</sup> edition. Springer-Verlag. 2003.
- [20] Webster, R. & Oliver, M.: *Geostatistics for Environmental Scientists*. John Wiley & Sons, Ltd. 2001.