K odhadům přesnosti posunu bodů

***Zdeněk Nevosád*[1]**

On Estimation Accuracy of Points Displacement

In the paper the estimates of position accuracy are given which are based on consistent and subsequent use of the true and mean square errors propagation laws. Firstly the covariance matrices $\boldsymbol{M}_U$ *of the simple functions* F_X, F_Y, F_Z *of measured quantities* L_i, *e.g. of the coordinates X, Y, Z of determined points U, are computed for each of the two measuring epochs compared. In following phase the acuuracy of the polar coordinates s, α of the monitored points displacements vectors* **s** *are derived. Reliability of the vectors depends upon proper relations of the introduced weights* p_i *of the measured quantities* L_i, *upon degrees of freedom in the horizontal network parametric adjustment, upon stableness of the given points (ties) K, and upon relative size of the residual systematic errors* c_i *of measured quantities* L_i *in relation to the respective random errors* μ_i.

Key words: *point displacement vectors, covariance matrix, laws of error propagation, true and mean error estimates.*

Úvod

K určování posunu bodů a deformací sledovaných objektů se používá terestrických a družicových metod nebo jejich kombinací. K tomuto účelu se často volí speciální terestrické geodetické sítě, skládající se jak z vhodně volených a dobře stabilizovaných pevných bodů *K*, tak z určovaných bodů *U*, jejichž možné změny jsou obvykle zaměřovány v pravidelně stanovených časových intervalech. Vznikají tak etapová měření, z jejichž výsledků jsou odvozovány posuny jednotlivých určovaných bodů. Důležitým kritériem posunů bodů, zjištěných mezi dvěma měřickými etapami, jsou odhady jejich přesnosti. V praxi se používá několika způsobů, zpravidla již naprogramovaných v daných softwarech. V dalším textu je přesnost vypočtených posunů bodů odvozována pomocí zákona šíření skutečných chyb pro terestrické sítě a z něho aplikovaných odhadů středních kvadratických chyb.

Odhady chyb vyrovnaných souřadnic

K základním metodám výpočtu souřadnic $\boldsymbol{x}_U \equiv [x_U, y_U, z_U]^T$ určovaných bodů $U \equiv P, Q, R, \ldots. Z$ náleží přímé vyrovnání terestrické sítě připojené na dané pevné body $K \equiv A, B, C, \ldots. N$ (Nevosád, 1981), transformace terestrické sítě vyrovnané nejprve v pomocné souřadnicové soustavě ξ, η, λ a vyrovnání družicové sítě, např. (Nevosád, 2002).

a. Terestrické sítě se obvykle zaměřují vodorovnými směry, zenitovými úhly, šikmými délkami a nivelačními převýšeními. Výsledné souřadnice x_U, y_U, z_U se zpravidla získají zprostředkujícím vyrovnáním. Výpočet charakterizují známé rovnice, např. (Böhm, 1990; Nevosád, 2002 a 1981)

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\,\delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\ell},\ \delta\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{n}, \tag{1}$$

kde $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{\ell}$. Vektor oprav $\boldsymbol{v}$ vyjadřuje opravy v_i měřených veličin Li, vektor neznámých $\delta\boldsymbol{x}$ přírůstky δX_U, δY_U, δZ_U přibližných souřadnic $X_U^{/}, Y_U^{/}, Z_U^{/}$ určovaných bodů U a vektor $\boldsymbol{\ell}_U$ absolutní členy rovnic oprav. Matice $\boldsymbol{A}$ obsahuje koeficienty u neznámých v rovnicích oprav a $\boldsymbol{P}$ je diagonální váhová matice měřených veličin.

Vektor $\varepsilon\boldsymbol{f}_V \equiv [\varepsilon_{X_V}, \varepsilon_{Y_V}, \varepsilon_{Z_V}]^T$ skutečných chyb vyrovnaných souřadnic jednoho určovaného bodu V je dán vztahem (Nevosád, 1981)

$$\varepsilon\boldsymbol{f}_V = \boldsymbol{F}_V\,\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{2}$$

kde $$\boldsymbol{F}_V = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_{X_V}^T \\ \boldsymbol{f}_{Y_V}^T \\ \boldsymbol{f}_{Z_V}^T \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots.\ \varepsilon_n]^T,$$

[1] *prof. Ing. Zdeněk Nevosád, DrSc.* Ústav geodézie, Fakulta stavební VUT,Veveří 95, Brno 60200, Česká Republika.
(Recenzovaná a revidovaná verzia dodaná 3. 11. 2009)

$$\boldsymbol{f}_{X_V} = \left[\frac{\partial X_V}{\partial L_1}, \frac{\partial X_V}{\partial L_2}, \dots \frac{\partial X_V}{\partial L_n}\right]^T, \quad \boldsymbol{f}_{Y_V} = \left[\frac{\partial Y_V}{\partial L_1}, \frac{\partial Y_V}{\partial L_2}, \dots \frac{\partial Y_V}{\partial L_n}\right]^T, \quad \boldsymbol{f}_{Z_V} = \left[\frac{\partial Z_V}{\partial L_1}, \frac{\partial Z_V}{\partial L_2}, \dots \frac{\partial Z_V}{\partial L_n}\right]^T;$$

L_i označují měřené veličiny a ε_i jejich skutečné chyby pro n měřených veličin.

Odhad středních souřadnicových chyb $m_{X_V}, m_{Y_V}, m_{Z_V}$ vyrovnaných souřadnic bodu V je dán maticí

$$\boldsymbol{M}_V = m_o^2 \boldsymbol{F_V} \boldsymbol{P^{-1}} \boldsymbol{F_V^T} \equiv m_o^2 \boldsymbol{Q}_V, \tag{3}$$

Pro všechny určované body U se rovnice (2) rozšíří na tvar

$$\varepsilon \boldsymbol{f} = \boldsymbol{F} \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{4}$$

kde $\boldsymbol{F} = [\boldsymbol{F_P}, \boldsymbol{F_Q}, \boldsymbol{F_R} \dots \boldsymbol{F_Z}]^T$.

Matice $\boldsymbol{F}$ je tvořena submaticemi sestávajícími z parciálních derivací souřadnic X_U, Y_U, Z_U podle jednotlivých měřených veličin L_i.

Odhad středních souřadnicových chyb $m_{X_U}, m_{Y_U}, m_{Z_U}$ vyrovnaných souřadnic poskytuje pro všechny body U diagonála $\boldsymbol{V_U}$ odpovídající chybové matice

$$\boldsymbol{M}_U = m_o^2 \boldsymbol{F} \boldsymbol{P^{-1}} \boldsymbol{F^T} \equiv m_o^2 \boldsymbol{Q}_U, \tag{5}$$

takže bude $\boldsymbol{V_U}\ \boldsymbol{j} = [m_{X_P}^2, m_{Y_P}^2, m_{Z_P}^2, \dots m_{X_Z}^2, m_{Y_Z}^2, m_{Z_Z}^2]^T$ (6)

Jednotková střední kvadratická chyba m_o je dána vztahem (BÖHM, 1990)

$$m_o^2 = \sum_1^n p_i\, v_i^2 \frac{1}{n-k}. \tag{7}$$

V rovnicích značí p_i, v_i váhy a opravy měřených veličin L_i, n počet měřených veličin a k počet vyrovnávaných neznámých.

b. Transformované souřadnice $\boldsymbol{u}_S = [X_S, Y_S, Z_S]^T$ určovaného bodu S jsou dány vztahem

$$\boldsymbol{u}_S = \boldsymbol{u}_S^{/} + \boldsymbol{v}_S, \tag{8}$$

kde vektor $\boldsymbol{u}_S^{/} \equiv [X_S^{/}, Y_S^{/}, Z_S^{/}]^T$ obsahuje souřadnice vypočtené pomocí transformačních rovnic a vektor $\boldsymbol{v}_S \equiv [v_{X_S}, v_{Y_S}, v_{Z_S}]^T$ souřadnicové opravy.

Přesnost výsledných souřadnic všech transformovaných bodů R ($\approx U$) je dána chybovou maticí (NEVOSÁD, 2002)

$$\boldsymbol{M}_R = m_o^2 \boldsymbol{Q_R}, \tag{9}$$

kde $\boldsymbol{Q}_R = \boldsymbol{H}\, \boldsymbol{Q}_U^{/}\, \boldsymbol{H}^T$, $\boldsymbol{H} = [\boldsymbol{H_P}, \boldsymbol{H}_Q, \dots \boldsymbol{H}_Z]^T$, $\boldsymbol{H}_S = [\boldsymbol{h_{X_S}}, \boldsymbol{h_{Y_S}}, \boldsymbol{h_{Z_S}}]^T$.

Pro podobnostní transformaci mají vektory tvar

$$\boldsymbol{h_{X_S}} = \left[\frac{\partial x_S}{\partial X_o}, \frac{\partial x_S}{\partial Y_o}, \frac{\partial x_S}{\partial Y_o}, \frac{\partial x_S}{\partial \alpha}, \frac{\partial x_S}{\partial \beta}, \frac{\partial x_S}{\partial \gamma}, \frac{\partial x_S}{\partial \mu}\right]^T,$$

$$\boldsymbol{h_{Y_S}} = \left[\frac{\partial y_S}{\partial X_o}, \frac{\partial y_S}{\partial Y_o}, \frac{\partial y_S}{\partial Y_o}, \frac{\partial y_S}{\partial \alpha}, \frac{\partial y_S}{\partial \beta}, \frac{\partial y_S}{\partial \gamma}, \frac{\partial y_S}{\partial \mu}\right]^T,$$

$$\boldsymbol{h_{Z_S}} = \left[\frac{\partial z_S}{\partial X_o}, \frac{\partial z_S}{\partial Y_o}, \frac{\partial z_S}{\partial Y_o}, \frac{\partial z_S}{\partial \alpha}, \frac{\partial z_S}{\partial \beta}, \frac{\partial z_S}{\partial \gamma}, \frac{\partial z_S}{\partial \mu}\right]^T.$$

V rovnicích značí $\boldsymbol{Q}_U^{/}$ matici váhových koeficientů pro vyrovnané souřadnice bodů R ve volné síti (ξ, η, λ), $\boldsymbol{H}_S$ matici parciálních derivací souřadnic X_S, Y_S, Z_S bodu S podle parametrů transformačních rovnic (u podobnostní transformace translaci X_o, Y_o, Z_o, rotaci α, β, γ a měřítko μ) pro bod S a $\boldsymbol{H}$ odpovídající matici parciálních derivací pro všechny určované body R.

Po vynásobení váhové matice $\boldsymbol{Q}_R$ kvadrátem střední jednotkové kvadratické chyby m_o vzniká odpovídající chybová matice (9).

c. Odhady přesnosti souřadnic družicové sítě s určovanými body D mohou být charakterizovány maticí $\boldsymbol{M}_D$ pro síť vyrovnanou z naměřených vektorů anebo odvozenou metodou RTK (Nevosád, 2002).

Odhady přesnosti posunu bodů

Vektory posunů ${}_{c}^{e}\boldsymbol{s}_U$ testovaných bodů $U\ (\approx R)$ mezi dvěma měřickými etapami jsou dány rovnicemi

$$ {}_{c}^{e}s_U = [({}_{e}X_U - {}_{c}X_U)^2 + ({}_{e}Y_U - {}_{c}Y_U)^2 + ({}_{e}Z_U - {}_{c}Z_U)^2]^{0,5}, \qquad {}_{c}^{e}\alpha_U = \operatorname{arctg}\frac{{}_{e}Y_U - {}_{c}Y_U}{{}_{e}X_U - {}_{c}X_U}, \tag{10} $$

popřípadě ${}_{c}^{e}s_{oU} = [({}_{e}X_U - {}_{c}X_U)^2 + ({}_{e}Y_U - {}_{c}Y_U)^2]^{0,5}$, ${}_{c}^{e}h_U = ({}_{e}Z_U - {}_{c}Z_U)$, $\left({}_{c}^{e}z_U = \arccos\dfrac{{}_{e}z_U - {}_{c}z_u}{s_U}\right)$,

kde ${}_{c}^{e}s_U$ jsou prostorové délky vektorů ${}_{c}^{e}\boldsymbol{s}_U$, ${}_{c}^{e}s_{oU}$ délky jeho průmětů do vodorovné roviny, ${}_{c}^{e}\alpha_U$ směrníky posunu, ${}_{c}^{e}h_U$ změny výšky a ${}_{c}^{e}z_U$ zenitové úhly posunů ${}_{c}^{e}\boldsymbol{s}_U$. Indexy c, e u souřadnic x_U, y_U, z_U označují porovnávané měřické etapy vybudované speciální sítě.

Odhady přesnosti posunů vycházejí opět ze zákona šíření skutečných chyb. Hlavním kritériem přesnosti posunu ${}_{c}^{e}\boldsymbol{s}_V$ testovaného bodu $V\ (\approx S)$ je chyba délky posunu ${}_{c}^{e}\varepsilon_{s_V}$, odvozená ze skutečných chyb ${}_{c}\varepsilon\boldsymbol{f}_V$, ${}_{e}\varepsilon\boldsymbol{f}_V$ vyrovnaných souřadnic (2)

$$ {}_{c}\boldsymbol{x}_V \equiv [{}_{c}x_V, {}_{c}y_V, {}_{c}z_V]^T, \quad {}_{e}\boldsymbol{x}_V \equiv [{}_{e}x_V, {}_{e}y_V, {}_{e}z_V]^T $$

v c-té a e-té měřické etapě. Pro skutečnou chybu vypočteného posunu platí rovnice

$$ {}_{c}^{e}\varepsilon_{s_V} = {}_{c}^{e}\boldsymbol{g}_V^{\boldsymbol{T}} \begin{bmatrix} {}_{c}\varepsilon\boldsymbol{f}_V \\ {}_{e}\varepsilon\boldsymbol{f}_V \end{bmatrix} \equiv {}_{c}^{e}\boldsymbol{g}_V^{\boldsymbol{T}}\ {}_{c}^{e}\varepsilon\boldsymbol{f}_V, \tag{11} $$

kde $$ {}_{c}^{e}\boldsymbol{g}_V = \left[\frac{\partial s_V}{\partial_c X_V}, \frac{\partial s_V}{\partial_c Y_V}, \frac{\partial s_V}{\partial_c Z_V}, \frac{\partial s_V}{\partial_e X_V}, \frac{\partial s_V}{\partial_e Y_V}, \frac{\partial s_V}{\partial_e Z_V}\right]^T. $$

V rovnici značí vektor ${}_{c}^{e}\boldsymbol{g}_V$ parciální derivace posunu ${}_{c}^{e}s_V$ bodu V podle jeho souřadnic (10) v etapách c, e a

$$ {}_{c}^{e}\varepsilon\boldsymbol{f}_V = [{}_{c}\varepsilon_{X_V}, {}_{c}\varepsilon_{Y_V}, {}_{c}\varepsilon_{Z_V}; {}_{e}\varepsilon_{X_V}, {}_{e}\varepsilon_{Y_V}, {}_{e}\varepsilon_{Z_V}]^T $$

vektor odpovídajících skutečných souřadnicových chyb bodu V.

Protože skutečné souřadnicové chyby jsou v každé etapě na sobě závislé, je třeba je vyjádřit pomocí vektorů skutečných chyb měřených veličin ${}_{c}L_i$, ${}_{e}L_i$ v obou porovnávaných etapách c, e.

Po úpravě rovnice (11) podle rovnice (2) je definována přímá závislost skutečné chyby délky posunu ${}_{c}^{e}\varepsilon_{s_V}$ bodu V na chybách měřených veličin

$$ {}_{c}^{e}\varepsilon_{s_V} = {}_{c}^{e}\boldsymbol{g}_V^{\boldsymbol{T}}\ {}_{c}^{e}\boldsymbol{F}_V\ {}_{c}^{e}\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{12} $$

kde $$ {}_{c}^{e}\boldsymbol{F}_V \equiv ({}_{c}\varepsilon\boldsymbol{f}_U, {}_{e}\varepsilon\boldsymbol{f}_U)^T = [{}_{c}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{P}}, {}_{c}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{Q}}, \ldots\ {}_{c}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{Z}}; {}_{e}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{P}}, {}_{e}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{Q}}, \ldots\ {}_{e}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{Z}}]^T $$

a $$ {}_{c}^{e}\boldsymbol{\varepsilon} = [{}_{c}\varepsilon_1, {}_{c}\varepsilon_2, {}_{c}\varepsilon_3, \ldots\ {}_{c}\varepsilon_n; {}_{e}\varepsilon_1, {}_{e}\varepsilon_2, {}_{e}\varepsilon_3, \ldots\ {}_{e}\varepsilon_n]^T. $$

Význam submatic

$$ {}_{c}\boldsymbol{F} = [{}_{c}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{P}}, {}_{c}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{Q}}, \ldots\ {}_{c}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{Z}}]^T \quad \text{a} \quad {}_{e}\boldsymbol{F} = [{}_{e}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{P}}, {}_{e}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{Q}}, \ldots\ {}_{e}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{Z}}]^T $$

je podobný jako v rovnici (3)

Odhad střední kvadratické chyby ${}_{c}^{e}m_{s_V}$ posunu bodu V je dán vztahem

$$ {}_{c}^{e}m_{s_V}^2 = {}_{c}^{e}m_o^2\ {}_{c}^{e}\boldsymbol{g}_V^{\boldsymbol{T}}\ {}_{c}^{e}\boldsymbol{Q}_V\ {}_{c}^{e}\boldsymbol{g}_V, \tag{13} $$

kde

$$ {}_{c}^{e}m_o^2 = \sum_{1}^{n}({}_{c}p_i\ {}_{c}v_i^2 + {}_{e}p_i\ {}_{c}v_i^2)\frac{1}{{}_{c}^{n}n-k}, \quad {}_{c}^{e}\boldsymbol{Q}_V = {}_{c}^{e}\boldsymbol{F}_V\ {}_{c}^{e}\boldsymbol{P}^{-1}\ {}_{c}^{e}\boldsymbol{F}_V^{\boldsymbol{T}}, \quad {}_{c}^{e}\boldsymbol{P} = [{}_{c}\boldsymbol{P}, {}_{e}\boldsymbol{P}]^T; $$

${}_c p_i$, ${}_c v_i$; ${}_e p_i$, ${}_e v_i$ jsou váhy a opravy měřených veličin v obou etapách c, e a ${}_c^e n$ počet měřených veličin v obou etapách.

Pro všechny body $U = P, Q, \ldots\ Z$ se rovnice (13) rozšíří na matici

$$ {}_c^e\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{s}_U} = {}_c^e m_o^2\ {}_c^e\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{s}_U}, \tag{14}$$

jejíž diagonála obsahuje odhady středních kvadratických chyb všech posunů ${}_c^e s_U$ testovaných bodů U.

Matice váhových koeficientů ${}_c^e\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{s}_U}$ je dána vztahem

$$ {}_c^e\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{s}_U} = {}_c^e\boldsymbol{G}\ {}_c^e\boldsymbol{Q}\ {}_c^e\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{T}}, $$

kde ${}_c^e\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} {}_c^e\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{P}}^{\boldsymbol{T}} \\ {}_c^e\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{Q}}^{\boldsymbol{T}} \\ \vdots \\ {}_c^e\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{Z}}^{\boldsymbol{T}} \end{bmatrix}$, ${}_c^e\boldsymbol{Q} = {}_c^e\boldsymbol{F}\ {}_c^e\boldsymbol{P}^{-1}\ {}_c^e\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{T}}$, ${}_c^e\boldsymbol{F} = [\,{}_c^e\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{P}}, {}_c^e\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{Q}}, \ldots\ {}_c^e\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{Z}}]^T$ a ${}_{ce}\boldsymbol{P} = [{}_c\boldsymbol{P}, {}_c\boldsymbol{P}]^T$.

Podobným způsobem je možno odvodit odhady středních chyb ${}_c^e m_{h_U}$, ${}_c^e m_{\alpha_U}$, ${}_c^e m_{s_{oU}}$, ${}_c^e m_{z_U}$ i pro ostatní parametry ${}_c^e h_U$, ${}_c^e \alpha_U$, ${}_c^e s_{oU}$, ${}_c^e z_U$ (10) vektorů posunů ${}_c^e\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{U}}$

Závěr

V příspěvku je uveden důsledný postup odhadů přesnosti testovaných posunů bodů pomocí zákona šíření skutečných chyb. Pro správnou aplikaci středních kvadratických chyb je důležité, aby skutečná chyba funkce, jejíž přesnost analyzujeme, byla vyjádřena pomocí skutečných chyb měřených veličin anebo alespoň pomocí skutečných chyb vzájemně nezávislých veličin. Odvození je uvedeno pro chybu délek vektorů posunů $\boldsymbol{s}_U$ bodů U. Stejným postupem lze použít i pro ostatní parametry posunů.

Odhady chyb funkcí měřených veličin mají různou pravděpodobnost, zejména v závislosti na počtu nadbytečně měřených veličin. Proto je třeba vynásobit výsledné odhady středních chyb parametrem t_α, odvozeným pro zvolenou hladinu významnosti, která bývá často volena pro α = 5 % (tj. pro pravděpodobnost p = 95 %). Bude tedy výsledný odhad přesnosti délky posunu s_U vyjádřen výrazem

$$ {}_\alpha\sigma_{s_U} = t_\alpha\, m_{s_U}. \tag{13}$$

Odhady přesnosti vypočtených posunů tetovaných bodů mohou být zatíženy některými nepříznivými vlivy. Kvalita odhadů je závislá např. na velikosti a vlivu zbytkových systematických chyb měřených veličin, na metodice měření, na struktuře sítě, na volbě vah měřených veličin, na stabilitě daných pevných bodů apod. Jedním z kritérií kvality měřických a výpočetních prací v každé etapě je porovnání apriorní a aposteriorní jednotkové chyby.

Literatura - References

Böhm, J., Radouch, V., Hampacher, M.: Terorie chyb a vyrovnávací počet. *GKP Praha, 1989, 416 str., ISBN 80-7011-056-2.*

Nevosád,. Z., Vitásek, J., Bureš, J.: Geodézie IV – Souřadnicové výpočty. *CERM Brno 2002, 157 str., ISBN 80-214-23401-3.*

Nevosád, Z.: Geodézie IV – Základní souřadnicové výpočty. *VAAZ Brno 1981, 384 str. U 1296 IV.*